Fen-Edebiyat Fakültesi

	ARA SINAV KAĞIDI	
Adı:	Dersin Adı: İLERİ ANALİZ II	Not
Soyadı:	Dersin Kodu: MAT2018	
Numarası:	Bölümü: İSTATİSTİK	
İmzası:	Sınav Tarihi: 05/04/2019	

SORULAR

1. **(15 puan)** $\int_0^2\int_x^2 e^{y^2}dydx$ iki katlı integrali için

   a) (5 puan) integrasyon bölgesini çiziniz.

   b) (10 puan) integrasyon sırasını değiştirerek verilen integrali hesaplayınız.

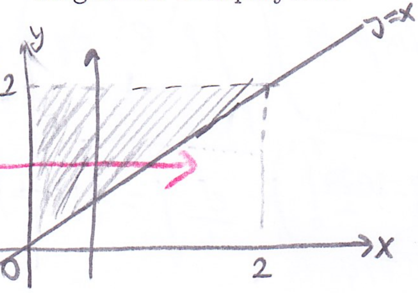
2. **(20 puan)** $\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dydx$ integrali için

   a) (7 puan) integrasyon bölgesini çiziniz.

   b) (13 puan) verilen integrali kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesaplayınız.

3. **(20 puan)** $\iiint_D xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dV$ integralini $D : \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, z\ge 0\}$ üst yarım küre bölgesinde hesaplayınız.

1) a)



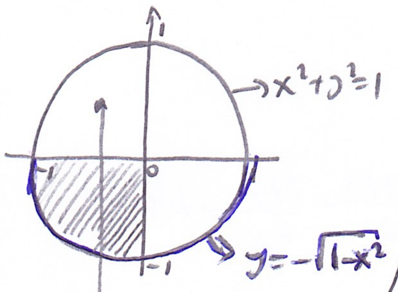
$\int_0^2\int_x^2 e^{y^2}dydx \Rightarrow 0\le x\le 2,\ x\le y\le 2$ dir.

b) $\int_0^2\int_x^2 e^{y^2}dydx = \int_{y=0}^2\int_{x=0}^y e^{y^2}dxdy = \int_0^2 y e^{y^2}dy = \int_{u=0}^4 e^u\frac{du}{2} = \frac12 e^u\Big|_0^4$ $\quad y^2=u,\ 2ydy=du$

$=\frac12(e^4-1)$ //

2) a) Verilen integral için sınırlar: $-1\le x\le 0$, $\underbrace{-\sqrt{1-x^2}}\le y\le 0$ dır.

$-\sqrt{1-x^2}=y \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$



b) $\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{dydx}{\sqrt{9-x^2-y^2}} = \int_{\theta=\pi}^{3\pi/2}\int_{r=0}^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{9-r^2}} = \int_{\theta=\pi}^{3\pi/2}\int_{u=9}^8 \frac{-du/2}{\sqrt u}d\theta$

Verilen bölge için (3. bölgede birim çember parçası) kutupsal koordinatlara geçelim.
$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=r^2$
$x^2+y^2=1$ birim çember için $r=1 \Rightarrow 0\le r\le 1$
ve $\pi\le\theta\le 3\pi/2$ dır.
$dydx=r\,dr\,d\theta$

$u=9-r^2$
$du=-2rdr$

$=\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)\frac12\int_8^9\frac{du}{\sqrt u}$

$=\frac{\pi}{4}\frac{u^{1/2}}{1/2}\Big|_8^9 = \frac{\pi}{2}(3-2\sqrt2)$

3) Küresel koordinatlara geçersek: $x=\rho\sin\phi\cos\theta$, $y=\rho\sin\phi\sin\theta$, $z=\rho\cos\phi$

D bölgesi: $x^2+y^2+z^2\le 1 \Leftrightarrow \rho^2\le 1 \Rightarrow \boxed{\rho\le 1}$ ve $z\ge 0 \Leftrightarrow \rho\cos\phi\ge 0 \Leftrightarrow \cos\phi\ge 0 \Leftrightarrow \boxed{0\le\phi\le\pi/2}$

$x^2+y^2+z^2=\rho^2$, $dV=\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ olur. →

4. **a) (10 puan)** $F = (ay^2)\overrightarrow{i} + (2xy + 2yz)\overrightarrow{j} + (by^2 + z^2)\overrightarrow{k}$ vektör alanının korunumlu olması için a ve b ne olmalıdır, bulunuz.

b) (10 puan) Bulduğunuz a ve b değerleri için F vektör alanının potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

c) (5 puan) C, $x = e^t(1-t)$, $y = 2t^2$, $z = 3t$, $0 \le t \le 1$ parametrik denklemi ile verilen bir eğri olmak üzere **a)** da belirlenen F vektör alanı için $\int_C F.dr$ eğrisel integralini hesaplayınız.

5. **(20 puan)** C, $x = 0$, $y = 0$ ve $x + y = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin sınırında pozitif yönlendirilmiş bir eğri olmak üzere $\oint_C (x^2 + y^2)dx - (2xy)dy$ eğrisel integralini hesaplayınız.

***Sınav süresi 90 dakikadır. Tüm cevaplarınızı anlaşılır bir biçimde açıklayarak yazınız. Açıklaması olmayan cevaplar değerlendirilmeyecektir. Cep telefonu kullanılması yasaktır.**

BAŞARILAR

Dr. Öğr. Üyesi. Fatih KIZILASLAN

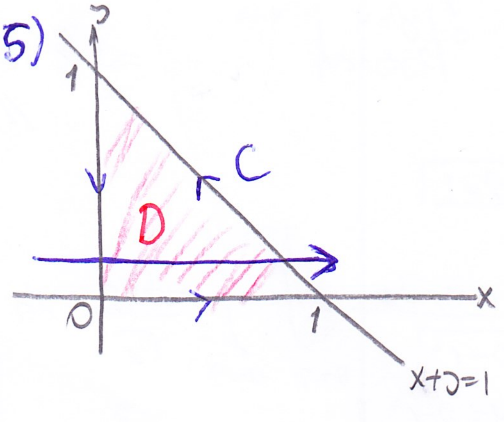
Sorular	1	2	3	4	5
Puan					

3. devamı:

$$\iiint_D x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{1} \underbrace{\rho\sin\phi\cos\theta}_{x}\, e^{(\rho^2)^2}\, \underbrace{\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta}_{dV}$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{1} \rho^3 e^{\rho^4} \sin^2\phi\cos\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right)}_{\sin\theta\Big|_0^{2\pi}=0}\underbrace{\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\sin^2\phi\, d\phi\right)}_{\underbrace{\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}}_{\pi/4}}\underbrace{\left(\int_{\rho=0}^{1}\rho^3 e^{\rho^4} d\rho\right)}_{\frac{e^{\rho^4}}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e-1)} = 0$$

5)



$$\oint_C \underbrace{(x^2+y^2)}_{M}dx\, \underbrace{-2xy}_{N}dy \underset{\text{Green Teo.}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \text{ dır.}$$

$M(x,y) = x^2+y^2$

$N(x,y) = -2xy$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -4y$$

Böylece,

$$\oint_C (x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = \iint_D -4y\, dA = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1-y} -4y\, dx\, dy = \int_0^1 -4y(1-y)\, dy$$

$$= \int_0^1 (4y^2 - 4y)\, dy = \frac{4y^3}{3} - \frac{4y^2}{2}\Big|_{y=0}^{1} = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

4) a) $F=\underbrace{(ay^2)}_{M}\hat{i}+\underbrace{(2xy+2yz)}_{N}\hat{j}+\underbrace{(by^2+z^2)}_{P}\hat{k}$ vektör alanının korunumlu olması için

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, $\dfrac{\partial M}{\partial z}=\dfrac{\partial P}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial z}$ eşitlikleri sağlamalıdır.

- $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2ay$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=2y \Rightarrow 2ay=2y \Leftrightarrow \boxed{a=1}$
- $\dfrac{\partial M}{\partial z}=0$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}=0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial M}{\partial z}=\dfrac{\partial P}{\partial x}}$
- $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2by$, $\dfrac{\partial N}{\partial z}=2y \Rightarrow 2by=2y \Leftrightarrow \boxed{b=1}$

$a=1$ ve $b=1$ olduğunda $\boxed{F=y^2\hat{i}+(2xy+2yz)\hat{j}+(y^2+z^2)\hat{k}}$ korunumludur.

b) F korunumlu vektör alanı olduğundan $F=\nabla\phi$ olacak biçimde $\phi(x,y,z)$ potansiyel fonk mevcuttur

$F=y^2\hat{i}+(2xy+2yz)\hat{j}+(y^2+z^2)\hat{k}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j}+\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$ eşitliğinden

- $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=y^2 \Rightarrow \displaystyle\int\dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx=\int y^2dx \Rightarrow \boxed{\phi(x,y,z)=y^2x+f(y,z)}$
- $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=2xy+2yz \Rightarrow \underbrace{\cancel{2yx}+\dfrac{\partial f}{\partial y}}_{\partial\phi/\partial y}=\underbrace{\cancel{2xy}+2yz}_{N} \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=2yz \Leftrightarrow f(y,z)=\displaystyle\int 2yz\,dy$

$\boxed{f(y,z)=y^2z+h(z)}$

Böylece, $\phi(x,y,z)=y^2x+y^2z+h(z)$ dir.

- $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=P=(y^2+z^2) \Rightarrow \cancel{y^2}+h'(z)=\cancel{y^2}+z^2 \Leftrightarrow h'(z)=z^2 \Rightarrow h(z)=\displaystyle\int z^2dz+C=\dfrac{z^3}{3}+C$

$\boxed{\phi(x,y,z)=y^2x+y^2z+\dfrac{z^3}{3}+C\ ,\ C\in\mathbb{R}}$ olarak bulunur.

c) $x=e^t(1-t)$
$y=2t^2$, $0\le t\le 1$ için C eğrisinin başlangıç noktası $t=0 \Rightarrow x=e^0(1-0)=1$
$z=3t$

$y=2.0=0$
$z=3.0=0$.

bitiş noktası $t=1 \Rightarrow x=e^1(1-1)=0$
$y=2.1^2=2$
$z=3.1=3$

Böylece, $\displaystyle\int_C F\cdot dr=\int_{(1,0,0)}^{(0,2,3)}\nabla\phi\cdot dr=\phi(0,2,3)-\phi(1,0,0)$

$=\left(0+2^2.3+\dfrac{3^3}{3}+\cancel{C}\right)-\left(1.0+0+0+\cancel{C}\right)=12+9$

$=21$