# MAT1034 - MATEMATİK II.
# BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI

20.06.2018

## 1) (11 puan)

$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$ integralinin üst sınırı $\infty$ olduğundan I. tip genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x e^{-x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^2} e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left( e^{-u} \Big|_{u=R^2}^{0} \right)$$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left( e^0 - e^{-R^2} \right) = \frac{1}{2}\Big(1 - \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{e^{R^2}}}_{1/\infty \to 0}\Big) = \boxed{\frac{1}{2} < \infty}$$

İntegralin değeri sonlu olduğundan verilen integral yakınsaktır.

## 2) (10 puan)

$$\int_4^\infty \frac{y\,dy}{y^2-2y-3} = ? \qquad \frac{y}{y^2-2y-3} = \frac{y}{(y-3)(y+1)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+1}$$

$$A = \lim_{y\to 3} \cancel{(y-3)} \frac{y}{\cancel{(y-3)}(y+1)} = \frac{3}{4} \quad \text{ve} \quad B = \lim_{y\to -1} \cancel{(y+1)} \frac{y}{(y-3)\cancel{(y+1)}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Böylece
$$\int_4^\infty \frac{y\,dy}{y^2-2y-3} = \frac{1}{4} \int_4^\infty \left[ \frac{3}{y-3} + \frac{1}{y+1} \right] dy$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 3 \cdot \ln|y-3| + \ln|y+1| \right] \Big|_{y=4}^{\infty} = \frac{1}{4}\Big[ 3\ln(5) + \ln 9 - 3\underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln 5 \Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[ 2\ln 5 + \ln \underbrace{9}_{3^2} \Big] = \frac{1}{2}\left[ \ln 5 + \ln 3 \right] = \boxed{\frac{1}{2} \ln(15)}$$

## 3) (10 puan)

$$\int_0^1 \frac{4\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1/2)} \frac{4 \cdot 2 \cdot \cos\theta\, d\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}} = \int_0^{\pi/6} \frac{8 \cancel{\cos\theta}\, d\theta}{2 \cdot \cancel{\cos\theta}} = 4\theta \Big|_{\theta=0}^{\pi/6} = \boxed{4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}}$$

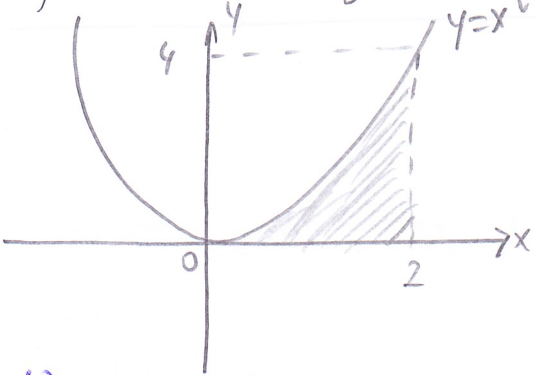
$x = 2\sin\theta$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$\theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$, $\arcsin(0) = 0$

$\arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}$

4) (15 puan) Birinci bölgede $y=x^2$ parabolü üstten, x-ekseni ile alttan ve sağdan $x=2$ doğrusu ile sınırlı bölge




a) (5 puan)

$$\text{Alan}=\int_0^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{2}=\boxed{\frac{8}{3}}$$

b) (10 puan) Bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V=\pi\int_a^b (g(y))^2\,dy$$ ile hesaplanır. $y=x^2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{y}$ ve 1. bölgede olduğumuzdan $x=\sqrt{y}$ alınır. Yani, $g(y)=\sqrt{y}$ olur.

$$V=\pi\int_0^4 (\sqrt{y})^2\,dy=\pi\int_0^4 y\,dy=\pi.\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{4}=\frac{\pi}{2}.16=\boxed{8\pi}$$

5) (15 puan)

a) $f(x)=\int_0^x \sqrt{\cos(2t)}\,dt$ eğrisinin $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz

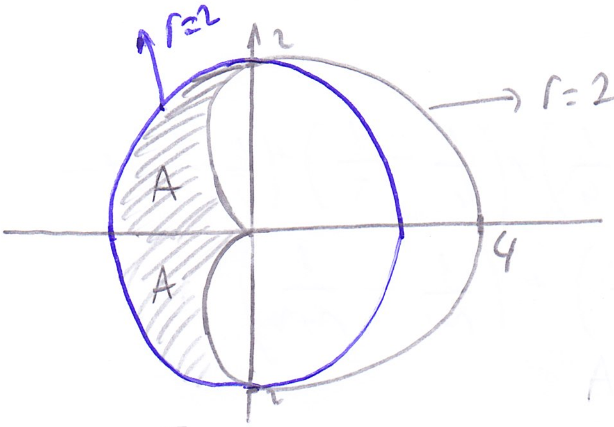
$y=f(x)$ eğrisinin $[a,b]$ aralığındaki uzunluğu $L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ dir

$f'(x)=\sqrt{\cos(2x)}$ (Leibnitz formülünden)

$$L=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\underbrace{\cos(2x)}_{\cos(2x)=2\cos^2(x)-1}}\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2\cos^2(x)}\,dx=\sqrt{2}.\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx$$

$$=\sqrt{2}\,\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\boxed{\sqrt{2}(1-(-1))=2\sqrt{2}}$$

5) b) (15 puan) $r=2(1+\cos\theta)$ kardioidinin dışı, $r=2$ çemberinin içinde kalan bölge




Taralı Alan $=2A$ dır

İki eğrinin kesişim noktaları
$2(1+\cos\theta)=2 \iff \cos\theta=0 \iff \theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\left[2^2-(2(1+\cos\theta))^2\right]d\theta=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\cancel{4}-[\cancel{4}+4\cos^2\theta+8\cos\theta]\right)d\theta$$

$$=-\frac{4}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos^2\theta+2\cos\theta)\,d\theta=-2\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}+2\cos\theta\right)d\theta$$

$$=-2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(2\theta)}{4}+2\sin\theta\Big|_{\theta=\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$=-2\left[\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\underbrace{\left(\sin(2\pi)-\sin(\pi)\right)}_{0}+2\left(\underbrace{\sin(\pi)}_{0}-\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right)\right]$$

$$=-2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-2\right]=\boxed{4-\pi/2}$$

Böylece toplam alan $\boxed{2A=2\left(4-\frac{\pi}{2}\right)=8-\pi}$ //

6) (7+7=14 puan)

a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{k-1}-1}{4^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{4^k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}$$

$r=\frac{1}{2}<1$ $\quad$ $r=\frac{1}{4}<1$

(# Yakınsak geo. seriler)

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right]-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}}<\infty$$ Yakınsaktır

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$ (Teleskopik seridir.)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$ bulunur. $S_n$ kısmi toplamlar dizisinin limiti $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} < \infty$ olup, yakınsak olduğundan

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \text{ olup, yakınsaktır.}}$$

7) (7+7=14 puan) Serilerin karakterlerini belirleyiniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$ serisi için karşılaştırma testinin limit halini kullanalım.

$a_n = \frac{n+2}{(n+1)^3}$ dir. $b_n = \frac{1}{n^2}$ olalım ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ serisi yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2}{(n+1)^3} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{3(n+1)^2} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n+4}{6\cdot(n+1)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{6} = 1 < \infty$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$ serisi ile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi aynı karakterlidir.

Böylece $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3} \text{ serisi yakınsaktır.}}$

7) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^3}{3^n}}_{a_n}$ serisi için oran testini kullanalım

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{3} < 1$$

$\rho < 1$ olduğundan Oran Testine göre verilen seri yakınsaktır.

8) (11 puan) $a_n \geq 0$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{S_n\}$ olsun.

a) (4 puan) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $S_n$ yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S < \infty$ olup, seri de yakınsaktır.

Eğer $S_n$ dizisi ıraksak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

Yani, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin karakteri ile $S_n$ dizisinin karakteri aynıdır.

b) (3 puan) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise, genel terimin limiti yani, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

Çünkü, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ olup $S_n - S_{n-1} = a_n$ ve $\underbrace{\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})}_{0} = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olur

c) (4 puan) $\forall n$ için $a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.