Bölüm 14 Problemler

Tanım Kümesi, Değer Kümesi ve Seviye Eğrileri

1–4 problemlerinde, verilen fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulun ve seviye eğrilerini tanımlayın. Tipik bir seviye eğrisini çizin.

1. $f(x, y) = 9x^2 + y^2$

2. $f(x, y) = e^{x+y}$

3. $g(x, y) = 1/xy$

4. $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$

5–8 problemlerinde, verilen fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulun ve seviye yüzeylerini tanımlayın. Tipik bir seviye yüzeyini çizin.

5. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

6. $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

7. $h(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

8. $k(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$

Limit Hesaplamak

9–14 alıştırmalarındaki limitleri hesaplayın.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi, \ln 2)} e^y \cos x$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2 + y}{x + \cos y}$

11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x - y}{x^2 - y^2}$

12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3y^3 - 1}{xy - 1}$

13. $\displaystyle\lim_{P\to(1,-1,e)} \ln|x + y + z|$

14. $\displaystyle\lim_{P\to(1,-1,-1)} \tan^{-1}(x + y + z)$

Farklı yaklaşma yolları düşünerek, 15 ve 16 problemlerindeki limitlerin var olmadığını gösterin.

15. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x^2}} \frac{y}{x^2 - y}$

16. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{x^2 + y^2}{xy}$

17. Sürekli genişleme $(x, y) \neq (0, 0)$ için $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ olsun. $f(0,0)$'ı, f'yi orijinde sürekli yapacak şekilde tanımlamak mümkün müdürü? Neden?

18. Sürekli genişleme

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x - y)}{|x| + |y|}, & |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

olsun. f, orijinde sürekli midir? Neden?

Kısmi Türevler

19–24 problemlerinde, fonksiyonun her değişkene göre kısmi türevini bulun.

19. $g(r, \theta) = r\cos\theta + r\sin\theta$

20. $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

21. $f(R_1, R_2, R_3) = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$

22. $h(x, y, z) = \sin(2\pi x + y - 3z)$

23. $P(n, R, T, V) = \dfrac{nRT}{V}$ (İdeal Gaz Yasası)

24. $f(r, l, T, w) = \dfrac{1}{2rl}\sqrt{\dfrac{T}{\pi w}}$

İkinci Derece Kısmi Türevler

25–28 problemlerindeki fonksiyonların ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulun.

25. $g(x, y) = y + \dfrac{x}{y}$

26. $g(x, y) = e^x + y\sin x$

27. $f(x, y) = x + xy - 5x^3 + \ln(x^2 + 1)$

28. $f(x, y) = y^2 - 3xy + \cos y + 7e^y$

Zincir Kuralı Hesaplamaları

29. $w = \sin(xy + \pi)$, $x = e^t$ ve $y = \ln(t + 1)$ ise, $t = 0$'da dw/dt'yi bulun.

30. $w = xe^y + y\sin z - \cos z$, $x = 2\sqrt{t}$, $y = t - 1 + \ln t$ ve $z = \pi t$ ise $t = 1$'de dw/dt'yi bulun.

31. $w = \sin(2x - y)$, $x = r + \sin s$, $y = rs$ ise $r = \pi$ ve $s = 0$ iken, $\partial w/\partial r$ ve $\partial w/\partial s$'yi bulun.

32. $w = \ln\sqrt{1 + x^2} - \tan^{-1} x$ ve $x = 2e^u\cos v$ ise $u = v = 0$ iken, $\partial w/\partial v$ ve $\partial w/\partial v$'yi bulun.

33. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 2t$ eğrisi üzerinde $t = 1$'de $f(x, y, z) = xy + yz + xz$'nin t'ye göre türevini bulun.

34. $w = f(s)$, s'nin diferansiyellenebilir bir fonksiyonuysa ve $s = y + 5x$ ise,

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 5\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

olduğunu gösterin.

Kapalı Türev Alma

35 ve 36 problemlerindeki denklemlerin y'yi x'in diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olarak tanımladığını varsayarak, dy/dx'in P noktasındaki değerini bulun.

35. $1 - x - y^2 - \sin xy = 0$, $P(0, 1)$

36. $2xy + e^{x+y} - 2 = 0$, $P(0, \ln 2)$

Doğrultu Türevleri

37–40 problemlerinde, f'nin P_0'da en hızlı arttığı ve azaldığı yönleri bulun ve her yönde f'nin türevini bulun. Ayrıca, f'nin P_0'da $\mathbf{v}$ vektörü yönündeki türevini bulun.

37. $f(x, y) = \cos x\cos y$, $P_0(\pi/4, \pi/4)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

38. $f(x, y) = x^2e^{-2y}$, $P_0(1, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

39. $f(x, y, z) = \ln(2x + 3y + 6z)$, $P_0(-1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

40. $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - z^2 + 2y + z + 4, \quad P_0(0, 0, 0),$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. Hız yönünde türev $f(x, y, z) = xyz$'nin $t = \pi/3$'te

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\sin 3t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

helisinin hız vektörünün yönündeki türevini bulun.

42. Maksimum doğrultu türevi $f(x, y, z) = xyz$'nin doğrultu türevinin (1, 1, 1) noktasında alabileceği en büyük değer nedir?

43. Verilen değerlerle doğrultu türevleri (1, 2) noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun (2, 2)'ye giden yönde değeri 2 olan bir doğrultu türevi ve (1, 1)'e giden yönde değeri –2 olan bir doğrultu türevi vardır.

a. $f_x(1, 2)$ ve $f_y(1, 2)$'yi bulun.

b. f'nin (1,2)'de (4, 6) noktasına giden yöndeki doğrultu türevini bulun.

44. $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0)'da diferansiyellenebilir ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

a. $\mathbf{u}$ bir birim vektörse, f'nin (x_0, y_0)'da $\mathbf{u}$ yönündeki doğrultu türevi $(f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u}$'dur.

b. f'nin (x_0, y_0)'da $\mathbf{u}$ yönündeki doğrultu türevi bir vektördür.

c. f'nin (x_0, y_0)'daki doğrultu türevinin en büyük değeri ∇f yönündedir.

d. (x_0, y_0)'da, ∇f vektörü $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ eğrisine normaldir.

Gradiyentler, Teğet Düzlemleri ve Normal Doğrular

45 ve 46 problemlerinde, $f(x, y, z) = c$ yüzeyini verilen noktalardaki ∇f'le birlikte çizin.

45. $x^2 + y + z^2 = 0; \quad (0, -1, \pm 1), \quad (0, 0, 0)$

46. $y^2 + z^2 = 4; \quad (2, \pm 2, 0), \quad (2, 0, \pm 2)$

47 ve 48 Problemlerinde, $f(x, y, z) = c$ seviye yüzeyine P_0'da teğet olan düzlemi bulun. Ayrıca, yüzeye P_0'da normal olan doğrunun parametrik denklemlerini bulun.

47. $x^2 - y - 5z = 0, \quad P_0(2, -1, 1)$

48. $x^2 + y^2 + z = 4, \quad P_0(1, 1, 2)$

49 ve 50 problemlerinde, verilen noktada $z = f(x, y)$ yüzeyine teğet düzlemin denklemini bulun.

49. $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (0, 1, 0)$

50. $z = 1/(x^2 + y^2), \quad (1, 1, 1/2)$

51 ve 52 problemlerinde, $f(x, y) = c$ seviye eğrisinin P_0 noktasındaki teğet ve normalinin denklemlerini bulun. Sonra doğruları ve seviye eğrisini P_0'daki ∇f ile birlikte çizin.

51. $y - \sin x = 1, \quad P_0(\pi, 1)$ **52.** $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3}{2}, \quad P_0(1, 2)$

Eğrilerin Teğetleri

53 ve 54 problemlerinde, yüzeylerin kesişim eğrilerinin verilen noktadaki teğeti olan doğrunun denklemini bulun.

53. Yüzeyler: $x^2 + 2y + 2z = 4, \quad y = 1$
Nokta: $(1, 1, 1/2)$

54. Yüzeyler: $x + y^2 + z = 2, \quad y = 1$
Nokta: $(1/2, 1, 1/2)$

Lineerizasyonlar

55 ve 56 problemlerinde, $f(x, y)$ fonksiyonunun P_0 noktasındaki $L(x, y)$ lineerizasyonunu bulun. Sonra $f(x, y) \approx L(x, y)$ yaklaşımının R dikdörtgeni üzerindeki hatasının büyüklüğü E'nin bir üst sınırını bulun.

55. $f(x, y) = \sin x \cos y, \quad P_0(\pi/4, \pi/4)$
$R: \quad \left|x - \frac{\pi}{4}\right| \le 0.1, \quad \left|y - \frac{\pi}{4}\right| \le 0.1$

56. $f(x, y) = xy - 3y^2 + 2, \quad P_0(1, 1)$
$R: \quad |x - 1| \le 0.1, \quad |y - 1| \le 0.2$

57 ve 58 problemlerinde, fonksiyonların verilen noktalardaki lineerizasyonlarını bulun.

57. $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$, (1, 0, 0) ve (1, 1, 0)

58. $f(x, y, z) = \sqrt{2}\cos x \sin(y + z)$, $(0, 0, \pi/4)$ ve $(\pi/4, \pi/4, 0)$

Tahminler ve Değişime Duyarlılık

59. Bir boru hattının hacmini ölçmek Çapı yaklaşık 36 inç ve uzunluğu 1 mil olan bir boru hattı parçasının içindeki hacmi hesaplamak istiyorsunuz. Hangi ölçümde daha dikkatli olmanız gerekir—uzunlukta mı, çapta mı? Neden?

60. Değişime duyarlık (1, 2) noktası civarında, $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ fonksiyonu x'teki değişimlere mi, y'deki değişimlere mi daha duyarlıdır? Nereden biliyorsunuz?

61. Elektrik devresini değiştirme Bir elektrik devresindeki I (amper) akımının V (volt) gerilimi ile R (ohm) direncine $I = V/R$ denklemiyle bağlı olduğunu varsayın. Gerilim 24'ten 23 volta düşer ve direnç 100'den 80 ohma düşerse, I artar mı, azalır mı? Ne kadar? I'daki değişim voltajdaki bir değişime mi yoksa dirençteki bir değişime mi daha duyarlıdır? Nereden biliyorsunuz?

62. Bir elipsin alanını öngörmede maksimum hata En yakın milimetreye yuvarlama ile $a = 10$ cm ve $b = 16$ cm olarak ölçülen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsinin hesaplanan alanı $A = \pi ab$'deki yüzde hatanın ne kadar olmasını beklersiniz?

63. Bir çarpımı öngörmedeki hata u ve v pozitif bağımsız değişkenler olmak üzere, $y = uv$ ve $z = u + v$ olsun.

a. u, %2'lik ve v de %3'lük bir hatayla ölçülüyorsa, hesaplanan y-değerindeki yüzde hata yaklaşık ne olur?

b. z'nin hesaplanan değerindeki yüzde hatanın y'nin değerindeki yüzde hatadan daha az olduğunu gösterin.

64. Kalp indisi Kalp çıktısı araştırmalarında (Bölüm 3.7, Alıştırma 25) farklı kişileri karşılaştırılabilir hale getirmek için, araştırmacılar ölçülen kalp çıktısını vücudun yüzey alanına bölerek, *kalp indisi* C'yi bulurlar:

$$C = \frac{\text{kalp çıktısı}}{\text{vücut yüzey alanı}}$$

Ağırlığı w kilogram ve boyu h santimetre olarak ölçülen bir kişinin B vücut yüzey alanına B'yi santimetre kare olarak veren

$$B = 71.84w^{0.425}h^{0.725},$$

formülüyle yaklaşım yapılır. Aşağıdaki ölçümlere sahip birinin kalp indisini hesaplamak üzeresiniz:

Kalp çıktısı:	7 L/dak
Ağırlık:	70 kg
Yükseklik:	180 cm

Hesapta hangisi daha büyük bir etki yaratacaktır, ağırlığı ölçerken yapılan 1 kg'lik bir hata mı, yüksekliği ölçerken yapılan 1 cm'lik bir hata mı?

Yerel Ekstremumlar

65–70 problemlerindeki fonksiyonları, yerel maksimum, minimum ve eyer noktaları için test edin. Fonksiyonun bu noktalardaki değerlerini bulun.

65. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$

66. $f(x, y) = 5x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x - 4y$

67. $f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 2y^3$

68. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 15$

69. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

70. $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + 3y^2 - 6y$

Mutlak Ekstremumlar

71–78 problemlerinde, f'nin R üzerinde mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

71. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$

R: Birinci dörtte bir bölgeden $x + y = 4$ doğrusuyla kesilen üçgensel bölge.

72. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1$

R: Birinci dörtte bir bölgede, koordinat eksenleri, $x = 4$ ve $y = 2$ doğrularıyla sınırlanan dikdörtgensel bölge.

73. $f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$

R: $x = \pm 2$ ve $y = \pm 2$ doğrularıyla çevrelenen kare bölge.

74. $f(x, y) = 2x + 2y - x^2 - y^2$

R: Birinci dörtte bir bölgede, koordinat eksenleri, $x = 2$, $y = 2$ doğrularıyla çevrelenen kare.

75. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$

R: Alttan x-ekseni, üstten $y = x + 2$ doğrusu ve sağdan $x = 2$ doğrusu ile sınırlanan üçgensel bölge.

76. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$

R: Alttan $y = -2$ doğrusu, üstten $y = x$ doğrusu ve sağdan $x = 2$ doğrusuyla sınırlanan üçgensel bölge

77. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

R: $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ doğrularıyla çevrelenen kare bölge.

78. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 + 1$

R: $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ doğrularıyla çevrelenen kare bölge.

Lagrange Çarpanları

79. Bir çember üzerinde ekstremum $f(x, y) = x^3 + y^2$'nin $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki ekstremum değerlerini bulun.

80. Bir çember üzerinde ekstremum $f(x, y) = xy$'nin $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki ekstremum değerlerini bulun.

81. Bir disk içinde ekstremum $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2y$'nin $x^2 + y^2 \le 1$ birim diski içindeki ekstremum değerlerini bulun.

82. Bir disk içinde ekstremum $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - xy$'nin $x^2 + y^2 \le 9$ diski içindeki ekstremum değerlerini bulun.

83. Bir küre üzerinde ekstremum $f(x, y, z) = x - y + z$'nin $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresi üzerindeki ekstremum değerlerini bulun.

84. Orijine minimum uzaklık $z^2 - xy = 4$ yüzeyi üzerinde orijine en yakın noktaları bulun.

85. Bir kutunun maliyetini minimize etmek Kapalı dikdörtgen şeklinde bir kutunun hacmi V cm^3 olacaktır. Kutuda kullanılan malzemenin masrafı taban ve tavan için a cent/cm^2, arka ve ön için b cent/cm^2 ve kalan yüzler için c cent/cm^2'dir. Hangi boyutlar toplam malzemenin maliyetini minimize eder?

86. En küçük hacim (2, 1, 2) noktasından geçen ve birinci sekizde bir bölgeden en küçük hacmi kesen $x/a + y/b + c/z = 1$ düzlemini bulun.

87. Yüzeylerin kesişim eğrisi üzerinde ekstremum $f(x, y, z) = x(y + z)$'nin $x^2 + y^2 = 1$ dik silindiriyle $xz = 1$ hiperbolik silindirinin kesişim eğrisi üzerindeki ekstremum değerlerini bulun.

88. Bir düzlem ile bir koninin kesişim eğrisi üzerinde orijine en küçük uzaklık $x + y + z = 1$ düzlemi ile $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ konisinin kesişim eğrisi üzerinde orijine en yakın noktayı bulun.

Kısıtlanmış Değişkenlerle Kısmi Türevler

89 ve 90 problemlerinde, işe değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren bir diyagram çizerek başlayın.

89. $w = x^2e^{yz}$ ve $z = x^2 - y^2$ ise, aşağıdakileri bulun.

a. $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ **b.** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ **c.** $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

90. $U = f(P, V, T)$, ideal gaz yasası $PV = nRT$'ye (n ve R birer sabit) uyan bir gazın iç enerjisi olsun. Aşağıdakileri bulun.

a. $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ **b.** $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$

Teori ve Örnekler

91. $w = f(r, \theta)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ olsun. $\partial w/\partial x$ ile $\partial w/\partial y$'yi bulun ve yanıtlarınızı r ve θ cinsinden ifade edin.

92. $z = f(u, v)$, $u = ax + by$ ve $v = ax - by$ olsun. z_x ile z_y'yi f_u, f_v ve a, b sabitleri cinsinden ifade edin.

93. a ve b sabit, $w = u^3 + \tanh u + \cos u$ ve $u = ax + by$ ise,

$$a\frac{\partial w}{\partial y} = b\frac{\partial w}{\partial x}$$

olduğunu gösterin.

94. Zincir Kuralını kullanmak $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$, $x = r + s$, $y = r - s$ ve $z = 2rs$ ise, Zincir Kuralıyla w_r ile w_s'yi bulun. Sonra yanıtınızı başka bir yolla kontrol edin.

95. Vektörler arasında açı $e^u \cos v - x = 0$ ve $e^u \sin v - y = 0$ denklemleri u ve v'yi x ile y'nin diferansiyellenebilir fonksiyonları olarak tanımlar.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}$$

vektörlerinin arasındaki açının sabit olduğunu gösterin.

96. Kutupsal koordinatlar ve ikinci mertebe türevler $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarını tanımlamak $f(x, y)$'yi $g(r, \theta)$'ya çevirir. $(r, \theta) = (2, \pi/2)$ noktasında,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

ise, o noktada $\partial^2 g/\partial\theta^2$ değerini bulun.

97. Bir düzleme paralel normal doğru

$$(y + z)^2 + (z - x)^2 = 16$$

Yüzeyi üzerinde normali yz-düzlemine paralel noktaları bulun.

98. *xy*-düzlemine paralel teğet düzlem

$$xy + yz + zx - x - z^2 = 0$$

yüzeyinin üzerinde teğet düzlemin xy-düzlemine paralel olduğu noktaları bulun.

99. Gradiyent vektör konum vektörüne paralel $\nabla f(x, y, z)$' nin her zaman $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ konum vektörüne paralel olduğunu varsayın. Herhangi bir a için, $f(0, 0, a) = f(0, 0, -a)$ olduğunu gösterin.

100. Her yönde doğrultu türevi var fakat gradiyent yok

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

fonksiyonunun orijinde her yöndeki doğrultu türevinin 1'e eşit olduğunu, ama f'nin orijinde gradiyentinin bulunmadığını gösterin.

101. Orijinden geçen normal doğru $xy + z = 2$ yüzeyinin (1, 1, 1)'deki normalinin orijinden geçtiğini gösterin.

102. Teğet düzlem ve normal doğru

a. $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ yüzeyini çizin.

b. Yüzeye (2, –3, 3)'te normal olan bir vektör bulun. Vektörü de çiziminize ekleyin.

c. (2, –3, 3)'teki teğet düzlemin ve normalin denklemlerini bulun.

Bölüm 14 Ek ve İleri Alıştırmalar

Kısmi Türevler

1. Orijinde eyer noktalı bir fonksiyon Bölüm 14.2'deki Alıştırma 50'yi yaptıysanız,

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun (aşağıdaki şekle bakın) (0, 0)'da sürekli olduğunu biliyorsunuzdur. $f_{xy}(0, 0)$ ve $f_{yx}(0, 0)$'ı bulun.