IST3002 Deney Tasarımı

Greko-Latin Kare Tasarım ve Tamamlanmamış Blok Tasarım

Fatih Kızılaslan

Marmara Üniversitesi

2019-2020 Bahar XI. Hafta

Greko-Latin Kare Tasarım

- Latin kare tasarımında satır ve sütun olmak üzere 2 farklı bloklama faktörü ile bir ana faktör kullanılır.
- **Greko-Latin kare** tasarımında ise satır, sütun ve Yunan (Greek) harfleri olmak üzere **3 farklı bloklama faktörü** ile **bir ana faktör** kullanılır.
- Biri Latin harfleri ve diğeri Yunan harfleri ile oluşturulan 2 tane pxp Latin karesi birleştirildiğinde düzeylerin kombinasyonu sadece 1 kez görünüyorsa bu tasarıma **Greko-Latin kare** tasarım denir.

Örneğin,

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \end{array}$$

yukarıda gibi verilen 2 tane 4x4 Latin karesini üst üste yerleştirerek aşağıdaki 4x4 Greko-Latin kare tasarım elde edilir.

$$\begin{array}{cccc}
A\alpha & B\beta & C\gamma & D\delta \\
B\delta & A\gamma & D\beta & C\alpha \\
C\beta & D\alpha & A\delta & B\gamma \\
D\gamma & C\delta & B\alpha & A\beta
\end{array}$$

- Greko-Latin kare tasarımda kullanılan düzey kombinasyonları sadece 1 kez kullanılmıştır.
- Bu tasarımda,
  1. Faktör düzeyleri ile bloklama faktörlerinin düzey sayıları birbirine eşittir,
  2. Latin harflerinin (A, B, C, D,..) her satır, her sütun ve her Yunan harfi ile sadece 1 kez uygulanır.

  kısıtları vardır.
- Bu kısıtlar nedeniyle çok fazla kullanılmaz.

Greko-Latin Kare Tasarımı: Matematiksel Model

pxp Greko-Latin kare tasarımı için matematiksel model

$$y_{ijkl} = \mu + \theta_i + \tau_j + w_k + \Psi_l + \epsilon_{ijkl}, \;\; i, j, k, l = 1, ..., p \tag{1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada,

y_{ijk}	:	i. satır, l. sütunda j. Latin harfi ve k. Yunan harfine karşılık gözlem
μ	:	genel ortalamayı,
θ_i	:	i. satırın etkisini,
τ_j	:	Latin harfi ile gösterilen faktörün j. düzeyinin etkisini,
w_k	:	Yunan harfi ile gösterilen faktörün k. düzeyinin etkisini,
Ψ_l	:	l. sütunun etkisini,
ϵ_{ijkl}	:	rastgele hata terimini

gösterir. **Varsayım:** $\epsilon_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2)$, $i, j, k, l = 1, ..., p$ biribirinden bağımsız rastgele değişkenlerdir

Greko-Latin kare tasarım için kareler toplamları ve serbestlik dereceleri aşağıdaki gibi olur. (Tablo 4.19, Montgomery D.C. Design and Analysis of Experiments-9th-Edt, Wiley)

TABLE 4.19

Analysis of Variance for a Graeco-Latin Square Design

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom
Latin letter treatments	$SS_L = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$
Greek letter treatments	$SS_G = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_{..k.}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$
Rows	$SS_{\text{Rows}} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{i...}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$
Columns	$SS_{\text{Columns}} = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p} y_{...l}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$
Error	SS_E (by subtraction)	$(p-3)(p-1)$
Total	$SS_T = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	p^2-1

Greko-Latin kare tasarımında satır, sütun, Latin ve Yunan harfleri ile gösterilen

- Satır faktörü için $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_p = 0$ ve H_1 :En az bir i için $\theta_i \neq 0$
- Sütun faktörü için $H_0 : \Psi_1 = \Psi_2 = ... = \Psi_p = 0$ ve H_1 :En az bir l için $\Psi_l \neq 0$
- Latin harfi ile gösterilen faktör için $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_p = 0$ ve H_1 :En az bir j için $\tau_j \neq 0$
- Yunan harfi ile gösterilen faktör için $H_0 : w_1 = w_2 = ... = w_p = 0$ ve H_1 :En az bir k için $w_k \neq 0$

hipotezlerini ilgili kareler toplamını MS_E bölerek elde edilen test istatistiğinin değerini $F_{(p-1),(p-3)(p-1),\alpha}$ tablo değeri ile karşılaştırarak sınarız.

Örneğin, eğer $F_L = \frac{SS_L/(p-1)}{SS_E/(p-3)(p-1)} > F_{(p-1),(p-3)(p-1),\alpha}$ olur ise $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_p = 0$ hipotezi red edilir. Diğerleri de benzer biçimde yazılabilir.

Örnek 2: (Alıştırma 6.4-3 [**Senoglu ve Acitas**])4 farklı gübre türünün (A, B, C, D) çiçek tohumlarının filizlenmesine olan etkisi araştırılmak isteniyor. Bu amaçla, 4 farklı türde bitki (B_1, B_2, B_3, B_4), 4 farklı çiçekçi (C_1, C_2, C_3, C_4) ve 4 farklı marka saksı toprağı $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ kullanılıyor. Bir ayın sonunda filizlerin boyları cm cinsinden aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi ölçülüyor.

	Bitki Türleri			
Çiçekçiler	B_1	B_2	B_3	B_4
C_1	$A\alpha = 7.75$	$C\beta = 6.93$	$D\gamma = 6.82$	$B\delta = 5.18$
C_2	$D\beta = 5.76$	$B\alpha = 6.54$	$A\delta = 6.19$	$C\gamma = 4.67$
C_3	$B\gamma = 4.48$	$D\delta = 7.02$	$C\alpha = 5.24$	$A\beta = 8.07$
C_4	$C\delta = 3.77$	$A\gamma = 6.44$	$B\beta = 6.00$	$D\alpha = 5.24$

Bu verileri kullanarak, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde,

a) Gübre türleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını sınayınız.

b) Toprak markaları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını sınayınız.

c) Çiçek türleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını sınayınız.

d) Çiçekçiler arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını sınayınız.

Birdal Şenoğlu ve Şükrü Acıtaş (2014). İstatistiksel Deney Tasarımı Sabit Etkili Modeller, 3. Basım, Nobel Akademik

Tamamlanmamış (Eksik) Blok Tasarım

Bazen deneylerde faktörün tüm düzeyleri her blokta kullanılmayabilir /kullanılamayabilir.

Örneğin, bir hastalığın tedavisinde kullanılan 4 farklı ilacın (A, B, C, D) iyileştirme süreleri karşılaştırılmak isteniyor. İlaçlar 4 farklı yaş grubundaki hastalara uygulancaktır. Varsayalım ki bu deney için her bir yaş grubundan sadece 3'er kişi vardır. Bu durumda, yapılacak olan blok tasarımda her bir ilaç türü her bir yaş grubuna uygulanamayacaktır. Aşağıdaki gibi bir tasarım oluşabilir.

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
A	C	B	D
D	B	C	A
C	A	D	B

veya

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
A	✓	✓	-	✓
B	-	✓	✓	✓
C	✓	✓	✓	-
D	✓	-	✓	✓

- Görüldüğü gibi bloklama faktöründe (yaş gruplarında) ana faktörün düzeylerinin (A, B, C, D) **sadece 3** tanesi vardır.

- Kullanılan faktör düzeyleri her blokta sadece 1 kez kullanılmıştır.
- Bu tip tasarımlara **tamamlanmamış (incomplete) blok tasarım** denir.
- Tamamlanmamış bir tasarımda her blokta kullanılan düzeyler rastgele seçilir ise bu tasarıma **rastgele tamamlanmamış blok tasarım** denir.
- Tasarımın tamamlanamamasının sebebi maddi sıkıntılar veya zaman kıstılaması veya uygun deney biriminin bulunamaması olabilir.
- Rastgele tam blok biçiminde tasarlanan ancak deney sırasında bir ya da birden fazla gözlemin kaybolması durumunda d**engeli tamamlanmamış blok tasarımı** kullanılmalıdır ([**Senoglu ve Acitas**]).
- Tamamlanmamış bir blok tasarımında her bir bloğa eşit sayıda faktör düzeyi rastgele olarak uygulanıyorsa bu tasarıma **dengeli tamamlanmamış blok tasarımı (balanced incomplete block design)** denir.

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
A	C	B	D
D	B	C	A
C	A	D	B

biçimindeki dengeli tamamlanmamış blok tasarımında

- 4 faktör düzeyi olduğundan toplam $\binom{4}{2} = 6$ tane deneme (faktör düzeyi) çifti, yani (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D), olur.
- Verilen tasarımda deneme çiftlerinin bloklarda bulunma sayısı 2'dir.

Faktörün a düzeyinin ve blokların sayısının b olduğu bir dengeli tamamlanmamış blok tasarımında,

- k : her bir bloktaki gözlem sayısını, (Eksik tasarım olduğundan $k < a$ dır)
- r : her bir faktör düzeyinin tekrar sayısını,
- λ : her bir deneme çiftinin bloklarda bulunma sayısını gösterir. (Örnek için $\lambda = 2$)
- Bu durumda, toplam $N = a\ r = b\ k$ gözlem vardır ve $\lambda = \dfrac{r(k-1)}{(a-1)}$ dır.

Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı: Matematiksel Model

Dengeli tamamlanmamış blok tasarımı için matematiksel model

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \;\; i = 1, ..., a, \;\; j = 1, ..., b \tag{2}$$

biçiminde ifade edilir. Burada,

y_{ij}	:	j. bloktaki, i. faktör düzeyine (denemeye) ait olan gözlem değerini,
μ	:	genel ortalamayı,
τ_i	:	faktörün i. düzeyinin etkisini,
β_j	:	j. bloğun etkisini,
ϵ_{ij}	:	j. bloktaki, i. faktör düzeyi için rastgele hata terimini

gösterir. **Varsayım:** $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ biçiminde biribirinden bağımsız rastgele değişkenlerdir

Kareler Toplamının Parçalanışı

(2) modeli için toplam kareler toplamı SS_T,

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \overline{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

biçimindedir.

- Her faktör düzeyi her blokta mevcut olmadığından $SS_T \neq SS_{Deneme} + SS_{Blok} + SS_E$ biçiminde olacaktır.
- SS_{Deneme} yerine blok etkileri deneme etkilerinden arındırılarak hesaplanan **düzeltilmiş (adjusted) denemeler kareler toplamı** $SS_{Deneme(Düzeltilmis)}$ kullanılır.

$$SS_{Deneme(Düzeltilmis)} = \frac{k}{\lambda a}\sum_{i=1}^{a} Q_i^2 \Longrightarrow (a-1) \text{ serbestlik dereceli}$$

biçiminde hesaplanır.

Burada, Q_i : i. faktör düzeyi için düzeltimiş toplam olmak üzere

$$Q_i = y_{i.} - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} y_{.j}, \;\; i = 1, ..., a$$

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & , i. \text{ faktör düzeyi } j. \text{ blokta varsa} \\ 0 & , i. \text{ faktör düzeyi } j. \text{ blokta yoksa} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. (k :her bir bloktaki gözlem sayısı)
Ayrıca,

- $SS_{Blok} = k\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} \Longrightarrow (b-1)$ serbestlik dereceli
- $SS_E = SS_T - SS_{Deneme(Düzeltilmis)} - SS_{Blok} \Longrightarrow (N-a-b+1)$ serbestlik dereceli

biçiminde olur.

Hipotez Testi ve Test İstatistiği

(2) ile verilen dengeli tamamlanmamış blok tasarımında faktör düzeyleri arasında fark olup olmadığını

$$\begin{aligned} H_0 &: \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a = 0 \\ H_1 &: \text{En az bir } i \text{ için } \tau_i \neq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

hipotezleri ile sınarız.

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a = 0$ hipotezi doğru olduğunda

$$F_{Deneme} = \frac{SS_{Deneme(Düzeltilmis)}/(a-1)}{SS_E/(N-a-b+1)} = \frac{MS_{Deneme(Düzeltilmis)}}{MS_E}$$

test istatistiği $(a-1)$ ve $(N-a-b+1)$ serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir: $F_{Deneme} \sim F_{(a-1),N-a-b+1}$

ANOVA Tablosu

Eğer F_{Deneme} test istatistiğinin değeri $F_{Deneme} > F_{(a-1),N-a-b+1,\alpha}$ olur ise

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a = 0$$

hipotezi reddedilir.
Bu durumda, f*aktör düzeyleri arasında anlamlı bir farklılık vardır* denir.

Şimdi yukarıda elde ettiklerimiz ile (2) modeli için ANOVA tablosunu oluşturalım.

Değişim kaynağı	Kareler toplamı	Serbestlik derecesi	Kareler ortalaması	F test değeri
Denemeler(Düz.)	$SS_{Deneme(Düzeltilmis)}$	$a-1$	$\frac{SS_{Deneme(Düzeltilmis)}}{a-1}$	$F_{Deneme} = \frac{S_{Deneme(Düzeltilmis)}}{MS_E}$
Bloklar	SS_{Blok}	$b-1$	$\frac{SS_{Blok}}{b-1}$	
Hata	SS_E	$N-a-b+1$	$\frac{SS_E}{N-a-b+1}$	
Toplam	SS_T	$N-1$		

Örnek 3: (Örnek 10.1 **[Senoglu ve Acitas]):** Dört farklı yemin (A, B, C, D) ineklerin süt verimine olan etkisi araştırılmak isteniyor. Bu amaçla her biri 3 inekten oluşan 4 farklı ırktan (I_1, I_2, I_3, I_4) toplam 12 tane inek kullanılıyor. Bu deneye ilişkin veriler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

	Irklar			
Yem	I_1	I_2	I_3	I_4
A	50	52	63	-
B	49	55	-	69
C	51	-	65	70
D	-	57	68	71

Bu verileri kullanarak, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde yemler arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını sınayınız.

Ödev: Yukarıda verilen formülleri kullanarak ANOVA tablosunu oluşturunuz ve ilgili hipotezi test ediniz.

Çözüm: R programında dengeli tamamlanmamış blok tasarımı kullanırken "aov" fonksiyonunda modelin yazımına dikkat etmeliyiz.

```
> anova1<-aov(y1~ irk + yem, data = data1)
> summary(anova1)
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)    
irk          3  770.7  256.89 244.656 7.65e-06 ***
yem          3   24.1    8.03   7.646   0.0258 *  
Residuals    5    5.3    1.05                     
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
> anova2<-aov(y1~  yem+irk , data = data1)
> summary(anova2)
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)    
yem          3  188.7   62.89   59.89 0.000243 ***
irk          3  606.1  202.03  192.41 1.39e-05 ***
Residuals    5    5.3    1.05                     
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
> 
```

Model "y˜blok faktörü + ana faktör" olarak yazılmaldır. Çünkü, bloklama yaptıktan sonra faktör düzeylerini karşılaştırmak istiyoruz. Bu nedenle anova1 modeli doğrudur.

Örnek 4: Veri aşağıdaki gibidir.

	Araba				
Yarışcı	1	2	3	4	5
1	-	17	14	13	12
2	14	14	-	13	10
3	12	-	13	12	9
4	13	11	11	12	-
5	11	12	10	-	8