

Titreşim Hareketi

Periyodik hareket

- Belirli bir zaman sonra, verilen/belirlenen bir duruma düzenli olarak geri dönen bir cismin yaptığı hareket.
- Periyodik hareketin özel bir çeşidi mekanik sistemlerde olur.
- Bir cismin denge konumu etrafında tekrarlı bir ileri-geri hareketi *periyodik* veya *titreşimli* diye adlandırılır.
- Bir yaya takılan kütlenin titreşimleri, bir sarkacın hareketi, katıdaki moleküllerin titreşimi, elektromanyetik dalgalar...
- Eğer bir kuvvet, her an cismin denge konumuna yönelik etkirse, *Basit Harmonik Hareket* olarak adlandırılır.

Basit Harmonik Hareket (BHH)

Sürtünmesiz yüzey üzerinde bir yaya tutturulmuş bir kütle BHH yapar.

- (a) Kütle, denge konumunun sağına kaydırıldığında yer değiştirme pozitif, ivme negatiftir.
- (b) Denge konumunda $x=0$, ivme sıfır hız en büyüktür.
- (c) Yer değiştirme negatif olduğunda, ivme pozitiftir.

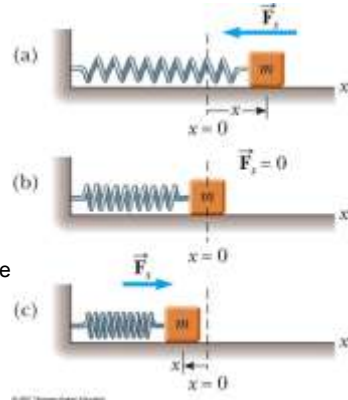
Kütle denge konumunda küçük bir x uzaklığı kadar kaydırılırsa; yay m kütlesi üzerine Hooke Yasası ile verilen $F_s = -kx$ geri çağırıcı kuvveti uygular. Yer değiştirme ile doğru orantılı olup, yönü daima denge konumuna doğrudur. k yayın kuvvet sabitidir.

M kütleinin x doğrultusundaki hareketine Newton Hareket Kanunu uygulanırsa,

$$F_{\text{Hooke}} = F_{\text{Newton}}$$

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$



İvme, kütleinin denge konumundan itibaren yer değiştirmesiyle orantılıdır ve zıt yöndedir.

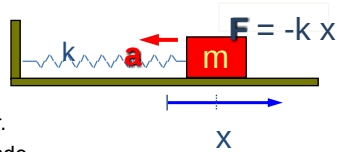
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \text{eğer} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{ile gösterirsek bu eşitlik,}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{şeklinde ikinci derece dif. denkleminin}$$

çözümünü sağlayan $x(t)$ fonksiyonudur. Bu çözüm,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad \text{Burada } A, \omega \text{ ve } \delta \text{ hareketin sabitleridir.}$$

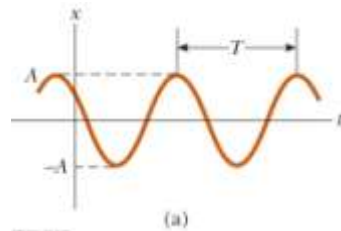
Bunların fiziksel anlamları x , t nin fonksiyonu olarak çizildiğinde



A : hareketin genliği olup, parçacığın $+x$ veya $-x$ yönündeki en büyük yer değiştirmesidir.

ω : açısal frekans olup, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ rad/s

δ : faz sabiti (faz açısı) olarak adlandırılır ve A genliği ile birlikte, parçacığın başlangıç yer değiştirmesi ve hızından belirlenir. A ve δ sabitleri $t=0$ anında yer değiştirmenin ne olduğunu belirtir. $(\omega t + \delta)$ büyüklüğüne hareketin fazı denir ve iki parçacıklı sistemler için hareketlerin karşılaştırılmasında önemlidir.

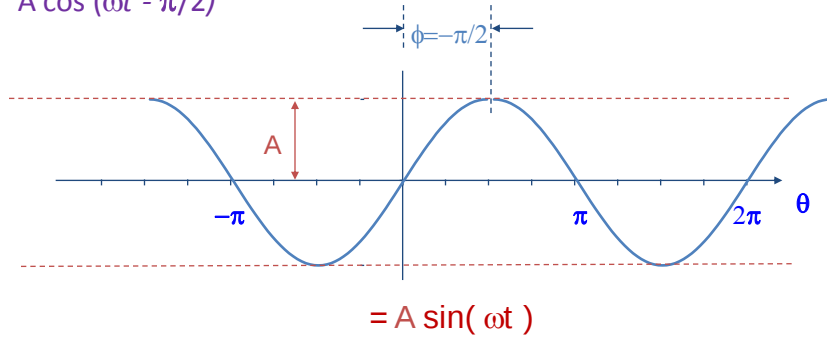


ωt , 2π radyan artmasıyla tekrarlanır. Hareketin periyodu, parçacığın bir tam devir yapması için gereken süredir. $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Periyodun tersi hareketin frekansı olup, parçacığın birim zamanda yaptığı titreşimlerin sayısını gösterir. $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ birimi 1/s=Hertz (Hz)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$A \cos(\omega t - \pi/2)$$



BHH yapan parçacığın hız ve ivmesi,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

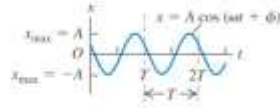
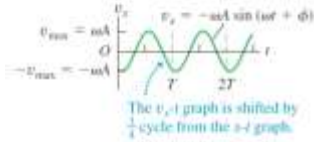
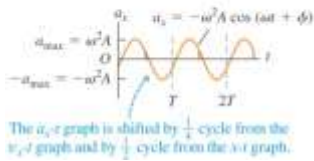
$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonları ± 1 arasında değiştiği için hız ifadesinin uç değerleri $\pm \omega A$ ve ivme ifadesinin uç değerleri $\pm \omega^2 A$ olduğu ve böylece hız ve ivmenin maksimum değerleri

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

(a) Displacement x as a function of time t (b) Velocity v_x as a function of time t (c) Acceleration a_x as a function of time t 

Keyfi bir faz sabiti için yer değiştirme-zaman değişimleri göz önüne alındığında hız ve ivmenin zamana bağlı değişimleri

Şekil (b) ve (c) den görüldüğü gibi hız fazının yer değiştirme fazından $\pi/2$ ya da 90° farklı olduğu, benzer şekilde ivme fazının yer değiştirme π radyan veya 180° kadar farklıdır.

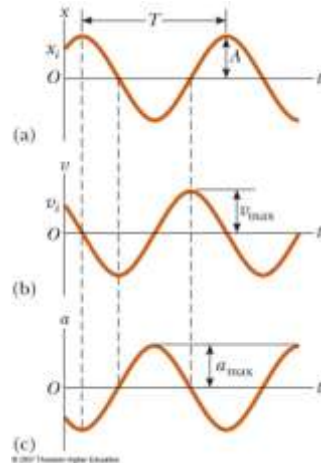
Hareketin δ faz açısı ve A genliği başlangıç şartlarından bulunabilir.

$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ ile verilen genel çözüm ifadesinde $t=0$ da $x=x_0$ ve $v=v_0$ ise

$x_0 = A \cos \delta$ ve $v_0 = -\omega A \sin \delta$ olur ve taraf tarafa bölünürse

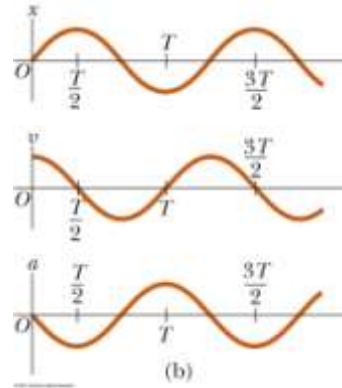
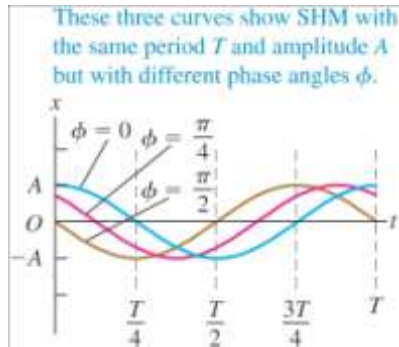
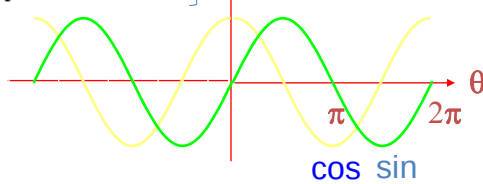
$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{A \cos \delta}{-\omega A \sin \delta} \text{ buradan faz açısı}$$

$$\tan \delta = -\frac{v_0}{\omega x_0} \text{ ve } \delta = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \text{ bulunur.}$$



yukarıdaki ifadelerin karelerini alarak, toplanıp düzenlenirse

$$\left. \begin{aligned} x_0^2 &= A^2 \cos^2 \delta \\ v_0^2 &= w^2 A^2 \sin^2 \delta \end{aligned} \right\} A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2 \text{ bulunur. (Ödev)}$$



Basit Harmonik Harekette Enerji

Sürtünmenin ihmal edildiği harmonik hareketlerde toplam mekanik enerji $E=K+U$

Kinetik enerji $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2\sin^2(wt + \delta)$

Bir x uzaması için yayda depolanan potansiyel enerji $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(wt + \delta)$

Toplam enerji $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(wt + \delta) + \cos^2(wt + \delta)]$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

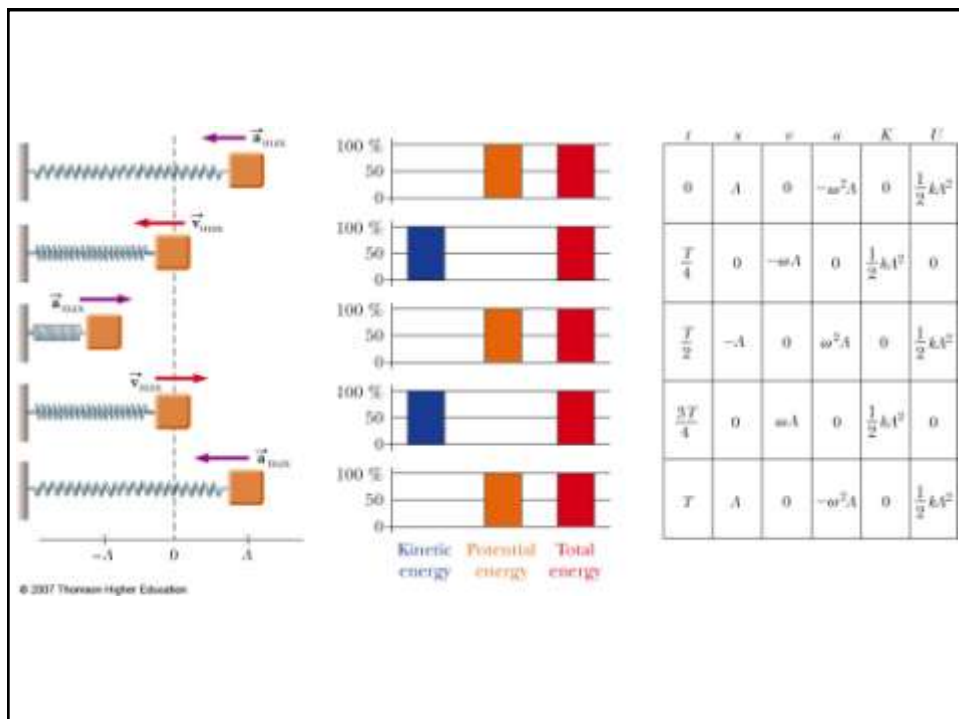
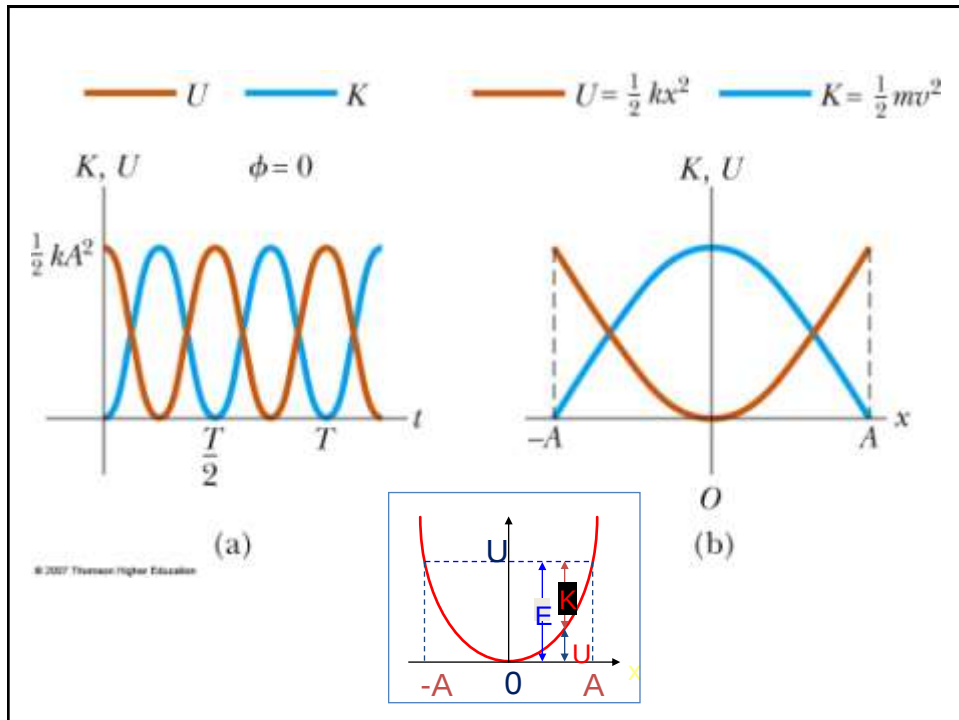
Toplam mekanik enerji, $x=\pm A$ olduğunda yayda depolanan enerji maksimum potansiyel enerjiye eşittir. Bu noktalarda $v=0$ ve kinetik enerji yoktur. Denge konumunda, $x=0$ ve $U=0$ olup, toplam enerji tamamıyla kinetik enerjidir.

Yani $E = \frac{1}{2}mv_{\text{mak}}^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2$

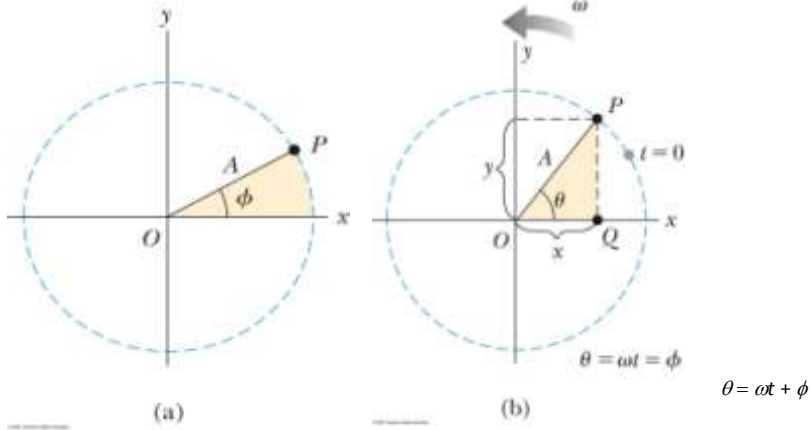
Herhangi bir x yer değiştirmesi için hız, enerji korunumundan

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\begin{aligned} v &= \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \\ &= \pm \omega^2 \sqrt{A^2 - x^2} \end{aligned}$$



BHH ve dairesel hareket



P ve Q daima aynı x koordinatına sahip iken, $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

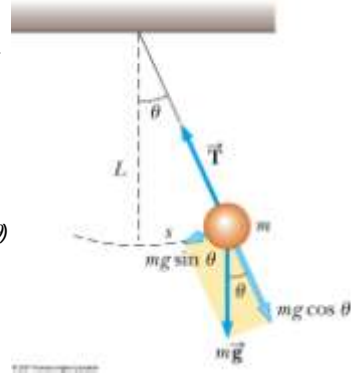
Basit sarkaç

Kütle üzerine etkiyen kuvvetler T gerilmesi ve mg ağırlığıdır.

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta = -\frac{g}{L} \theta \quad (\text{küçük } \theta \text{ değerleri için } \sin \theta \approx \theta)$$

- Çözüm θ 'nın fonksiyonu olarak
 $\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$
- Açısal frekansı $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$
- Periyot $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$



Periyot kütleden bağımsız, eşit boydaki tüm basit sarkaçlar, aynı yerde eşit periyotla salınırlar.

Fiziksel sarkaç

Fiziksel veya bileşik sarkaç, kütle merkezinden geçmeyen sabit bir eksenenden asılan herhangi bir katı cisimden ibarettir.

O noktasına göre dönme (tork) yerçekimi kuvveti tarafından sağlanır. Newton 2. har.yasası

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad \theta \text{ nın küçük olduğu kabul edilirse, } \sin \theta \approx \theta$$

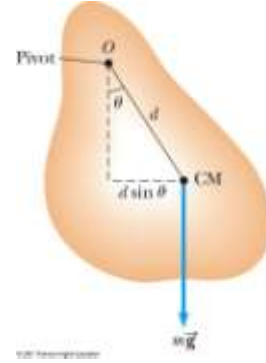
Yaklaşımından hareket denklemi

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right) \theta = -\omega^2 \theta \quad \theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Açısal frekans $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$

Periyot $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$

$I = md^2$ olduğu zaman, yani tüm kütle merkezinde toplandığı zaman, basit sarkacın periyoduna indirgenir.



Sönümlü salınımlar

Gerçek sistemlerde sürtünme etkisi söz konusudur. Sistemin mekanik enerjisi zamanla azalır.

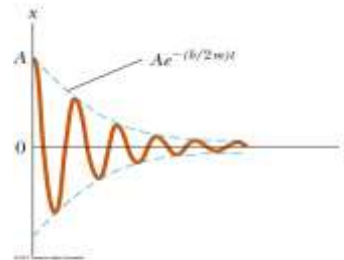
$F_{sür} = -b v$ ya da $\vec{R} = -b \vec{v}$ b sürtünme katsayısı

Newton 2. yasası $\Sigma F_x = -kx - bv_x = ma_x$

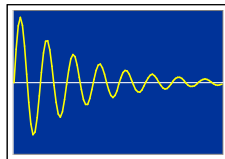
$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$b_c / 2m = \omega_0$ ile verilen b gibi bir kritik değere ulaştığında Sistem titreşmez ve kritik olarak sönmüştür denir.

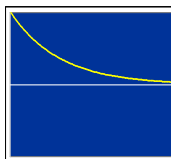


$$\omega_0 > b/2m$$



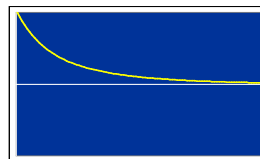
underdamped

$$\omega_0 = b/2m$$



critically damped

$$\omega_0 < b/2m$$



overdamped

Küçük sönüm için sürücü kuvvetin frekansı doğal titreşim frekansına yakın olduğu zaman veya $\omega = \omega_0$ olduğunda genlik büyük değerler alır. Doğal frekans yakınında, genlikteki bu dramatik artışa *rezonan* ve ω_0 frekansına da sistemin *rezonans frekansı* denir.

