İST254: Mühendisler İçin İstatistik

Ders 2: Küme Teorisi, Örnek Uzay, Permütasyonlar ve Kombinasyonlar

18.02.2014

Ders İçeriği

- Küme Kavramı
- Küme İşlemleri
- Deney, Örnek Uzay, Örnek Nokta ve Olay Kavramları
- Örnek Noktaları Sayma
- Permütasyonlar
- Kombinasyonlar
- Parçalanmalar (Partition)
- Binom teoremi

Küme

- **Küme:** Ayrı nesnelerin iyi tanımlanmış bir kolekiyonu. Örnek: İST254 dersini alan öğrenciler,
  $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{x \in \mathbb{N} | 2 \leq X \leq 10\}$
- **Eleman:** Kümelerin üyeleri olan nesneler
- **Boş küme:** Hiç elemanı olmayan küme. Örnek: tek sayıda elektronu olan asal gazlar, $\emptyset$
- **Sonlu küme:** Belirli sayıda elemanı olan küme. Örnek: Halojenler
- **Sonsuz küme:** Sonsuz sayıda elemanı olan küme. Örnek: tek sayılar
- **Evrensel küme:** Tüm elemanları içeren küme. **E**
- **Ayrık küme:** Ortak elemanı olmayan kümeler

Küme İşlemleri

- Kesişim: Birden fazla kümenin ortak elemanlarından oluşur.

$$A \cap B = \{x | x \in A \; ve \; x \in B\}$$

- Birleşim: Birden fazla kümenin en az birine ait elemanlardan oluşur.

$$A \cup B = \{x | x \in A \; veya \; x \in B\}$$

- Tümleyen: Bir kümeye ait olmayan elemanlardan oluşur

$$A' = \{x | x \in E \; ve \; x \notin A\}$$

Küme İşlemlerinin Özellikleri

	Birleşim	Kesişim
Özdeşlik (Identity)	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup E = E$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap E = A$
Tümleme (Complement)	$A \cup A' = E$ $(A')' = A$	$A \cap A' = \emptyset$
Değişme (Commutative)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Idempotent	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Birleşme (Associative)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Dağılma (Distributive)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
De Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Alıştırmalar

(2.6.1) Bu bölümde kullanılan iki farklı gösterim şekli ile de aşağıdaki kümelerin her birini gösteriniz.

a) Pozitif tam sayılar kümesi

$$\{1,2,3,\dots\}, \{x | x \in \mathbb{N}\}$$

b) Pozitif çift sayılar kümesi

$$\{2,4,6,\dots\}, \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$

c) Bir para atıldığında elde edilen sonuçların kümesi

$$\{Y, T\}, \{x | x = Y, T\}$$

d) Bir zar atıldığında elde edilen sonuçların kümesi

$$\{1,2,3,4,5,6\}, \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$$

Alıştırmalar

(2.6.20)Aşağıdaki eşitliği sadeleştiriniz:

$A = (B \cup C) \cap (B \cup C') \cap (B' \cup C)$

A$= [B \cup (C \cap C')] \cap (B' \cup C) =$

$= (B \cup \emptyset) \cap (B' \cup C) =$

$= B \cap (B' \cup C) =$

$= (B \cap B') \cup (B \cap C) =$

$= \emptyset \cup (B \cap C) =$

$= (B \cap C)$

Deney, Örnek Uzay, Örnek Nokta ve Olay

- **Deney:** Sonucu önceden kesin olarak bilinemeyen, veri oluşturan süreç. Örnek: Bir zar atışı, HCl çözeltisinin pH'ının ölçümü, vs.
- **Örnek Uzay:** Bir deneyin olası tüm sonuçlarını kapsayan küme. Örnek: Zar atışı için $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
- **Örnek Nokta:** Örnek uzayın üyesi olan olası sonuçların her biri. Örnek: pH ölçümü için 2.1
- **Olay:** Örnek uzayın alt kümesi.Örnek: Ölçülen pH değerinin 2'den küçük olması

Alıştırmalar

(2.6.24) A, B, C aşağıdaki gibi tanımlanan bir S örnek uzayında olaylar olsun.

$S = \{x|x = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A = \{x|x = 1,3,5,7,9\}$

$B = \{x|x = 1,2,3,4,5,6\}$

$C = \{x|x = 5,6,7,8,9,10\}$

a) $A \cap (B \cap C)$

b) $(A \ \cup B)'$

c) $(A \cup A')$

d) $A \cup B \cup C$

e) $C' \cap B'$

f) S'

olaylarını bulunuz

Alıştırmalar

(2.6.24) A, B, C aşağıdaki gibi tanımlanan bir S örnek uzayında olaylar olsun.

$S = \{x|x = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$A = \{x|x = 1,3,5,7,9\}$
$B = \{x|x = 1,2,3,4,5,6\}$
$C = \{x|x = 5,6,7,8,9,10\}$

a) $A \cap (B \cap C) = \{5\}$
b) $(A \ \cup B)' = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}' = \{8\}$
c) $(A \cup A') = S$
d) $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = S$
e) $C' \cap B' = \emptyset$
f) $S' = \emptyset$
olaylarını bulunuz

Alıştırmalar

(2.6.28) A ve B aynı örnek uzayda ayrık olaylar olsun. C bu uzayda herhangi bir olay olmak üzere,

a) A' ve B' ayrık olaylar mıdır?

$(A' \cap B') = (\mathrm{A} \cup B)'$

$\mathrm{A} \cup B = S$ değilse A' ve B' ayrık değildir.

b) $A \cap C$ ve $B \cap C$ ayrık olaylar mıdır?

$(A \cap C) \cap (B \cap C) = C \cap (A \cap B) = C \cap \emptyset = \emptyset$

c) $A \cup C$ ve $B \cup C$ olayları için ne söylenebilir?

$(A \cup C) \cap (B \cup C) = C \cup (A \cap B) = C$

$C = \emptyset$ değilse $A \cup C$ ve $B \cup C$ ayrık değildir.

Örnek Noktaları Sayma

- **Toplama Kuralı:** Birbirinden ayrık k işlemden ilki N_1, ikincisi N_2, ... k'ıncı N_k farklı şekilde yapılabiliyorsa, bu işlemlerden biri $N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ farklı şekilde yapılabilir.
- **Çarpma Kuralı:** Birbirini etkilemelen k işlemden ilki N_1, ikincisi N_2, ... k'ıncı N_k farklı şekilde yapılabiliyorsa, bu k işlem birlikte $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$ farklı şekilde yapılabilir.

Alıştırmalar

Bir yakıt ekonomisi testinde 3 farklı araç, 5 farklı marka yakıt kullanılarak, 4 farklı bölgede test ediliyor. Test, olası olan her koşul altında bir kez yapıldığına göre, kaç kez tekrar edilmiştir?

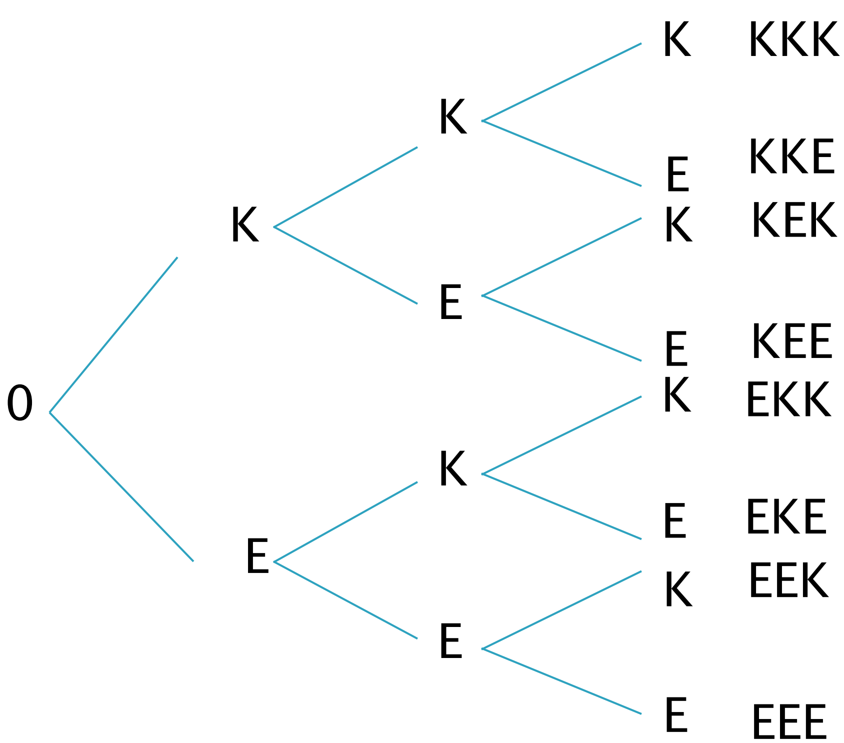
$$N = N_1 \times N_2 \times N_3 = 3 \times 5 \times 4 = 60$$

Alıştırmalar

(2.5.1) Üç çocuklu ailelerde kız ve erkek çocuk dağılımlarını bulmak için böyle aileler üzerinde araştırma yapılmıştır. Üç çocuklu aileler kitlesinden bir ailenin seçilmesi deneyi için örnek uzayı bulunuz.

$$S = \{KKK, KKE, KEK, KEE, EKK, EKE, EEK, EEE\}$$

Alıştırmalar



Ağaç Diagramı

Alıştırmalar

(2.5.11) 1, 2, 3, 4 sayıları dört ayrı kağıt parçası üzerine yazılarak bir torbanın içine atılıyor. Gözleri bağlanmış bir şahıs biri diğerinden sonra olmak üzere çekilen geriye atılmaksızın iki kağıt parçası çekiyor. Bu deney için örnek uzayı yazınız.

	1	2	3	4
1		(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)		(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)		(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(2, 3)	

Alıştırmalar

Bir zar oyununda bir çift zar atılıyor; zarların toplamı 2, 3 ya da 12 gelirse oyuncu A, 7 ya da 11 gelirse oyuncu B kazanıyor. Diğer toplamlarda ise oyun tekrarlanıyor. Oyuncu B kaç farklı şekilde kazanabilir?

Zarların toplamı 6 şekilde 7 gelebilir {1-6, 2-5, 3-4, 4-3, 5-2, 6-1}

Zarların toplamı 2 şekilde 11 gelebilir {5-6,6-5}

Oyuncu B 6+2= 8 şekilde kazanabilir.

Permütasyon

- Bir kümenin elemanlarının bir kısmının ya da tümünün belli bir sıralamasına permütasyon denir.
- n sayıda eleman $n!$ farklı şekilde sıralanabilir.
- n sayıda elemandan r tanesi sıralanarak
  $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$
  permütasyon oluşturulabilir.

Alıştırmalar

(3.1.9) 1, 2, 3, 4, 5 rakamları ile kaç tane 4 basamaklı sayı yazılabilir?

a) Rakamlar yinelenmiyor

$$ {}_5P_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 $$

b) Rakamlar yinelenebiliyor

$$ 5^4 = 625 $$

c) Rakamların yinelenmeden yazılan sayının tek olması isteniyor

$$ 3 \times {}_4P_3 = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72 $$

Dairesel Permütasyonlar

- Dairesel olarak yerleştirilen nesnelerin tümünün yerleri birer sıra kaydırılırsa sıraları değişmez.
- Dolayısıyla n sayıda eleman $(n-1)!$ farklı şekilde sıralanabilir.
- n sayıda elemandan r tanesi bir daire oluşturarak $\frac{{}_{n}P_{r}}{r} = \frac{n!}{r \times (n-r)!}$ farklı şekilde sıralanabilirler

Alıştırmalar

5 farklı ağaç bir daire oluşturacak şekilde dikilecektir. Bu ağaçlar kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

$$(5-1)! = 4! = 24$$

8 farklı ağaçtan 6 tanesi seçilerek daire oluşturacak şekilde dikileceklerdir. Bu ağaçlar kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

$$\frac{{}_8P_6}{6} = \frac{8!}{6 \times (8-6)!} = 3360$$

Özdeş Nesnelerin Permütasyonu

n nesnenin r_1 adedi birinci tür, r_2 adedi ikinci tür, ... , r_k adedi k'ıncı tür ise, söz konusu n nesne

$$\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$$

Şekilde sıralanabilir

Alıştırmalar

Bir çocuğun 4 kırmızı, 2 siyah, 1 de sarı oyuncak arabası vardır. Renkleri dışında oyuncak arabaların renk dışında farkı olmadığına göre, bu oyuncaklar kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

$$\binom{7}{4,2,1} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{2} = 105$$

Kombinasyon

- Bir kümenin belli sayıda elemanının sırasına önem vermeksizin seçilmesidir.
- n sayıda elemadan r tanesi ${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ şekilde seçilebilir

Alıştırmalar

52 farklı karttan oluşan standart bir desteden çekilebilecek 5 kartlı kaç farklı el vardır?

$$_{52}C_5 = \binom{52}{5} = \frac{52!}{47! \times 5!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 2{,}597{,}960$$

Alıştırmalar

15 üyesi bulunan bir öğrenci klübü 1 başkan, 2 başkan yardımcısı ve 1 denetçiden oluşan yönetim kurulunu kaç farklı şekilde seçebilir?

$$15 \times {}_{14}C_2 \times 12 = 15 \times \frac{14 \times 13}{2} \times 12 = 16380$$

Parçalanmalar

- A kümesinin n elemanı; r_1 elemanı A_1, r_2 elemanı $A_2, \ldots, r_k$ elemanı A_k kümesine düşecek şekilde k kümeye $\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \cdots \times r_k!}$ şekilde parçalanabilir.

- A kümesinin n elemanı; r elemanlı k kümeye $\frac{n!}{(r!)^k \times k!}$ şekilde parçalanabilir

Alıştırmalar

25 oyuncusu bulunan bir futbol takımı kaç farklı şekilde 17 kişilik maç kadrosu ve ilk 11 belirleyebilir?

$$\frac{25!}{11! \times 6! \times 8!} = 13{,}385{,}572{,}200$$

Alıştırmalar

20 öğrenci 5'er kişilik 4 takıma kaç farklı şekilde bölünebilir?

$$\frac{20!}{(5!)^4 \times 4!} = 488{,}864{,}376$$

Binom Teoremi

n pozitif tam sayısı için:

$$(a+x)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r} x^r + \cdots + \binom{n}{n} x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} x^r$$

$\binom{n}{r}$ katsayılarına binom katsayıları denir