5.2.10 Alıştırmalar.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+y-1)^2}{x^2+y^2+2x-4y+5}$ limitinin olup olmadığını araştırınız.

2. Limit tanımını kullanarak

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} (3xy - 8x + 2y) = -24 \quad \text{ve} \quad \lim_{(x,y)\to(1,1)} (y^2 - 3xy) = -2$$

olduğunu gösteriniz.

3. Aşağıdaki fonksiyonların limitlerinin olup olmadığını araştırınız.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x-1-\frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve pozitif $n_1 < n_2 < \cdots$ sayılarının olması demektir. $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ sınırlı olduğundan yakınsak bir $((x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}))$ alt dizisi vardır. Eğer $((x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})) \to (x_0, y_0)$ ise

$$||(x_n, y_n) - (u_n, v_n)|| \to 0$$

olduğundan $((u_{n_{k_j}}, v_{n_{k_j}})) \to (x_0, y_0)$ dır. f, A da sürekli olduğundan

$$||f(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) - f(u_{n_{k_j}}, v_{n_{k_j}})|| \to ||f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)|| = 0$$

dır. Bu ise $j \in \mathbb{N}$ için

$$||f(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) - f(u_{n_{k_j}}, v_{n_{k_j}})|| \geq \varepsilon$$

olması ile çelişkidir. O halde f, A da düzgün süreklidir. ■

5.3.16 Alıştırmalar.

1. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktada sürekliliğini araştırınız.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, (0,0)$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, (0,0)$

5. $f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}, (0,0)$

6. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

7. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

9. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} e^{-x^2-y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

10. $f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

11. $f(x,y) = \begin{cases} 3 + \frac{2(x-2)^2(y+3)}{x^2+y^2-4x+6y+13} & (x,y) \neq (2,-3) \\ 3 & (x,y) = (2,-3) \end{cases}$

12. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

13. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların sürekli oldukları kümeleri bulunuz.

1. $f(x,y) = \ln\left(\frac{y}{x^2+y^2-1}\right)$ 2. $f(x,y) = \sqrt{1+x-y^2}$ 3. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$

4. $f(x,y) = \ln(x \ln(y-x))$ 5. $f(x,y) = \ln(9-x^2-9y^2)$

6. $f(x,y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{xy}}$ 7. $f(x,y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-4}$

8. $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$ 9. $f(x,y) = x + \arccos y$

10. $f(x,y) = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$

3. $f, g : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x+y)^2$ ve

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & x+y \geq 0 \\ -f(x,y) & x+y < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonların $[-1,1] \times [-1,1]$ de sürekli olduklarını gösteriniz.

4. Aşağıdaki fonksiyonların süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$ 2. $f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(xy) & xy > 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

5. $f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/|x-y|} & x \neq y \\ \lambda & x = y \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyonun $\mathbb{R}^2$ de sürekli olması için λ değerini bulunuz.

6.1.17 Alıştırmalar.

1. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

1. $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$
2. $f(x,y) = xe^{\frac{y}{x}}$
3. $f(x,y) = \ln(e^{\frac{y}{x}} + e^{\frac{x}{y}})$
4. $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$
5. $f(x,y) = \arcsin(\tan \sqrt{\frac{x}{y}})$
6. $f(x,y) = x^2y + xy^2$
7. $f(x,y) = \sin(x-y) - \cos(x+y)$
8. $f(x,y) = \ln(\sec(x-2y))$
9. $f(x,y) = \tan(xy) + \cot(xy)$

2. $(x,y) \neq (0,0)$ için aşağıdaki gibi tanımlanan fonksiyonların $(0,0)$ noktasında birinci mertebeden kısmi türevlerinin olup olmadığını araştırınız ($f(0,0) = 0$ dır).

1. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^4+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$
6. $f(x,y) = \frac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|}$
7. $f(x,y) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$
8. $f(x,y) = \frac{x^4y}{x^2+y^2}$
9. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$

3. Aşağıdaki fonksiyonların Jakobiyen matrisini bulunuz.

1. $f(x,y) = (3x-2y, x^2y)$
2. $f(x,y) = (x^2y, xy^2, xy)$
3. $f(x,y) = (2x^2-3xy^2, x^2+y^2)$
4. $f(x,y) = (xy, \frac{x}{y^2}, \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2})$
5. $f(x,y) = (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$
6. $f(x,y) = (\sin(2x+y), e^{2x-y})$
7. $f(x,y) = (xy, 1+3x, 2x+y^3)$
8. $f(x,y,z) = (x^2-y^2+z^2, xyz)$
9. $f(x,y,z) = (\sin\frac{yz}{x}, \cos\frac{xz}{y}, \tan\frac{xy}{z})$
10. $f(x,y,z) = (xy-z^2, 3x^2, 2xyz, yz^3)$
11. $f(x,y,z) = (\frac{xy}{z}, e^{x^2y}, \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

6.2.31 Alıştırmalar.

1. $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^2 - 5x$ fonksiyonu için $df(-1,2;0.2,-0.01)$, $\Delta f(-1,2;0.2,-0.01)$, $df(0,-1;-0.02,0.1)$ ve $\Delta f(0,-1;-0.02,0.1)$ değerlerini hesaplayınız.

2. $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + 2x^2y$ fonksiyonunun $(2,3)$ noktasındaki diferensiyelini bulunuz. Ayrıca $\Delta f(2,3;0.05,-0.02)$ ve $df(2,3;0.05,-0.02)$ değerlerini hesaplayınız.

3. $(x,y) \neq (0,0)$ için aşağıdaki fonksiyonların $(0,0)$ noktasında diferensiyellenebilir olup olmadığını araştırınız ($f(0,0) = 0$ dır).

1. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ 2. $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 3. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

4. $f(x,y) = \frac{x^5}{x^4+y^2}$ 5. $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ 6. $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

7. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 8. $f(x,y) = \frac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|}$ 9. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

10. $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$ 11. $f(x,y) = |y|\ln(1+x)$

12. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$

4. $f(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu, ancak bu noktada diferensiyellenemediğini gösteriniz.

5. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki noktalardaki diferensiyellenebilirliğini araştırınız.

1. $f(x,y) = y\sqrt{x}$, $(4,1)$
2. $f(x,y) = xy - 3x^2$, $(1,2)$
3. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(0,0)$
4. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $(0,0)$
5. $f(x,y) = x - 3\sin y$, $(1,0)$
6. $f(x,y) = \frac{3x+2y}{x-y}$, $(2,1)$

6. $f(x,y) = |x|\sin(x^2+y^2)$ olarak tanımlanan fonksiyonun herhangi bir (x_0,y_0) noktasındaki diferensiyellenebilirliğini araştırınız.

7. a sabit bir reel sayı olmak üzere

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^a \sin x & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $(0,0)$ noktasındaki diferensiyellenebilirliğini araştırınız.

8.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

fonksiyonun $(0,0,0)$ noktasındaki diferensiyellenebilirliğini araştırınız.

9. Aşağıdaki ifadelerin (varsa) hangi $f(x,y)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli olduğunu bulunuz.

1. $(x^2+2xy-y^2)dx + (x^2-2xy-y^2)dy$
2. $(e^{2y} - 5y^3e^x)dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)dy$
3. $(2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$
4. $e^x(e^y(x-y+2)+y)dx + e^x(e^y(x-y)+1)dy$
5. $(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} - \frac{y}{x^2})dx + (\frac{-x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{x})dy$
6. $\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$
7. $\frac{(x^2+2xy+5y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$
8. $\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$

10. Aşağıdaki fonksiyonların Laplace denklemini sağladığını gösteriniz (g, Laplace denklemini sağlayan ve ikinci mertebeye kadar türevlenebilen bir fonksiyon).

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$
2. $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$
3. $f(x,y) = g(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$

4. $f(x,y) = e^x\cos y$
5. $f(x,y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

11. Aşağıdaki fonksiyonların dalga denklemini sağladığını gösteriniz.

1. $f(x,y) = \sin(kx)\sin(aky)$
2. $f(x,y) = \frac{y}{a^2y^2-x^2}$
3. $f(x,y) = (x-ay)^6 + (x+ay)^6$
4. $f(x,y) = \sin(x-ay) + \ln(x+ay)$

12. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki kısmi diferensiyel denklemleri sağlayıp sağlamadığını araştırınız.

1. $f(x,y) = e^{x+y}(x+y)$, $f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy} = 0$
2. $f(x,y) = y\arctan\sqrt{x^2-y^2}$, $\frac{f_x}{x} + \frac{f_y}{y} = \frac{f}{y^2}$
3. $f(x,y) = \cosh(\frac{y}{x}) + \tan(\frac{x}{y})$, $xf_x + yf_y = 0$ ve $yf_{yy} + xf_{xy} + f_y = 0$
4. $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$, $f_{xx} - f_{yy} = 0$
5. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $xf_x + yf_y = 1$

13. $y \neq 0$ olmak üzere $w = f(x,y,z) = z\arctan\frac{x}{y}$ olarak tanımlanan fonksiyon için $w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0$ olduğunu gösteriniz.

14. Aşağıda $z = f(x,y)$ fonksiyonu yardımıyla verilen yüzeylere, yanlarındaki noktadan çizilen teğet düzlem denklemini bulunuz.

1. $f(x,y) = x^2 + xy$, $(x_0,y_0) = (-1,1)$
2. $f(x,y) = 2x + y^2 - x^3y$, $(x_0,y_0) = (-1,1)$
3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2$, $(x_0,y_0) = (1,-2)$
4. $f(x,y) = x^2y + 3xy^2 + 4xy - 5x$, $(x_0,y_0) = (2,-3)$
5. $f(x,y) = \sin(2x-3y) - \cos(2x+3y)$, $(x_0,y_0) = (\pi/2, \pi/3)$
6. $f(x,y) = xe^y$, $(x_0,y_0) = (1,0)$
7. $f(x,y) = e^{y^2-x^2}$, $(x_0,y_0) = (-1,1)$
8. $f(x,y) = x\ln y$, $(x_0,y_0) = (4,1)$

15. Aşağıdaki ifadelerin yaklaşık değerini hesaplayınız.

1. $\sqrt{(18.03)^2 + (23.98)^2}$
2. $(5.2)^2 + (12.1)^2$
3. $(6.04)\cdot(3.1)\cdot(2.96)$

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x^2y, xz, y^2z, xyz)$ ve $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $g(x,y,z,w) = (xy, yz, zw, xyzw)$ fonksiyonları ve $P_0 = (1,2,-3)$ noktası için $f(P_0) = (2,-3,-12,-6)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
d(g \circ f)(P_0) &= dg(f(P_0))df(P_0) \\
&= \begin{bmatrix} y & x & 0 & 0 \\ 0 & z & y & 0 \\ 0 & 0 & w & z \\ yzw & xzw & xyw & xzy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 2xz & x \\ yz & xz & y^2 \\ & & xy \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \\ -216 & 144 & 36 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 4 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -18 & -3 & 2 \\ 36 & 36 & -24 \\ 72 & 108 & -48 \\ -1728 & -864 & 432 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dir.

6.3.9 Alıştırmalar.

1. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında belirtilen kısmi türevlerini hesaplayınız.

1. $f(y_1,y_2) = 2y_1^2 + y_1y_2^2$, $y_1(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + xz^3$, $y_2(x,y,z) = yz^2 + xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
2. $f(y_1,y_2) = \cos(y_1^2 + y_2^2)$, $y_1(x,y,z) = \sin^2(xyz)$, $y_2(x,y,z) = 2xy^2 + yz^3 - xz^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
3. $f(y_1,y_2) = \cos y_1^2 + \sin y_2^2$, $y_1(x,y) = x^2 + y^2$, $y_2(x,y) = \tan(x+y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
4. $f(y_1) = y_1^2$, $y_1(x,y,z) = x + xz + y^2$, $\frac{\partial f}{dx}, \frac{\partial f}{dy}, \frac{\partial f}{dz}$.
5. $f(y_1,y_2) = y_1^2 \cos y_2$, $y_1(x,y) = x^2 + y^2$, $y_2(x,y) = x \sec y$, $\frac{\partial f}{dx}, \frac{\partial f}{dy}$.

2. g türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere $x - az - g(y - bz) = 0$ kapalı denklemiyle verilen $z = f(x,y)$ fonksiyonu için $az_x + bz_y = 1$ olduğunu gösteriniz.

3. f ve g ikinci mertebeye kadar türevlenebilen tek değişkenli fonksiyonlar olmak üzere $F(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax)$ olarak tanımlanan F fonksiyonu için $F_{xx} = a^2F_{yy}$ olduğunu gösteriniz.

4. $z = f(x,y)$, $x = u + v$ ve $y = u - v$ olarak tanımlanan fonksiyon için $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

5. $z = f(x,y)$, $x = u\cosh v$, $y = u \sinh v$ fonksiyonu için

$$(\frac{\partial f}{\partial u})^2 - \frac{1}{v^2}(\frac{\partial f}{\partial v})^2 = (\frac{\partial f}{\partial x})^2 - (\frac{\partial f}{\partial y})^2$$

olduğunu gösteriniz.

6. Zincir kuralını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki kısmi diferensiyel denklemi sağlayıp sağlamadığını araştırınız.

1. $z = f(xy)$, $xz_{xx} - yz_{yy} + (x-y)z_{xy} + z_x - z_y = 0$
2. $z = f(x+ay) + g(x-ay)$, $z_{yy} - a^2z_{xx} = 0$
3. $f(x,y,z) = (\frac{x}{y})^{\frac{z}{y}}$, $xf_x + yf_y + zf_z = 0$

7. g, h ve k ikinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere, zincir kuralını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların yanlarındaki kısmi diferensiyel denklemi gerçeklediğini gösteriniz.

1. $f(x,y) = \sin y + g(\sin x - \sin y)$, $\cos y f_x + \cos x f_y = \cos x \cos y$
2. $f(x,y) = xy + xg(\frac{y}{x})$, $xf_x + yf_y - xy = f$
3. $f(x,y) = xg(\frac{y}{x})$, $x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy} = 0$
4. $f(x,y) = g(xy)\ln y + h(xy)$, $x^2f_{xx} - 2xyf_{xy} + y^2f_{yy} + xf_x + yf_y = 0$
5. $f(x,y) = yh(x^2 - y^2)$, $\frac{f_x}{x} + \frac{f_y}{y} = \frac{f}{y^2}$
6. $f(x,y) = g(xy)$, $xf_x - yf_y = 0$
7. $f(x,y) = g(\frac{x}{y}, \frac{y}{x})$, $xf_x + yf_y = 0$
8. $f(x,y) = e^{2x}\cos(g(y))$, $f_{yy} + \frac{f_y}{y} + \frac{f_{xx}}{y^2} = 0$
9. $f(x,y) = x^ng(\frac{y}{x})$, $xf_x + yf_y = nf$
10. $f(x,y) = h(x^2 + y^2)$, $xf_y - yf_x = 0$
11. $f(x,y) = g(x+z) + xy(x+z)$, $yz_y - xz_x - x = 0$
12. $f(x,y,z) = g(\frac{x}{z}) + h(\frac{y}{z})$, $xz_x + yz_y - z = 0$
13. $f(x,y) = g(x+ky) + h(x-ky)$, $f_{xx} - \frac{1}{k^2}f_{yy} = 0$

14. $f(x,y) = g(x-y, y-x)$, $f_x + f_y = 0$

15. $f(x,y) = g(x^2-y^2, y^2-x^2)$, $yf_x + xf_y = 0$

16. $f(x,y) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta} = 0$ ($f_{xx} + f_{yy} = 0$ ise)

17. $f(x,y,z) = g(x,y) + h(y,z) + k(x,z)$, $f_{xyz} = 0$

8. Aşağıdaki f ve g fonksiyonları ve P_0 noktası için $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun P_0 daki diferensiyelini hesaplayınız.

1. $f(x,y) = (3x^2y, -2xy^2)$, $g(x,y) = (x^2-y^2, x^2+3y^2)$, $P_0 = (1,-1)$

2. $f(x,y) = (x^2y, 3x-4y^2)$, $g(x,y) = (x^2, -xy^2, 2x^2y)$, $P_0 = (3,2)$

3. $f(x,y,z) = (xyz, 3xy, y^2z)$, $g(x,y,z) = (\frac{xy}{z}, x^2yz, -xy^2z^3)$, $P_0 = (-2,3,1)$

4. $f(x,y) = (x^2, -2xy^2, x^2+y^2)$, $g(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2, xyz)$, $P_0 = (0,-4)$

7.1.7 Alıştırmalar.

1. Aşağıda $F(x, y) = 0$ denklemiyle verilen $y = f(x)$ kapalı fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerini hesaplayınız.

1. $F(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$ 2. $F(x,y) = \ln \frac{x}{y} + e^{\frac{y}{x}} = 0$

3. $F(x,y) = x^2y - xy^2 + 3xy - 4x + 5y - 1 = 0$

4. $F(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y) = 0$

5. $F(x,y) = x^2 + xy^3 + 3xy - 4x + 5y - 2 = 0$

2. Aşağıda $F(x,y,z) = 0$ denklemiyle verilen $z = f(x,y)$ kapalı fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

1. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 5xyz - 3 = 0$

2. $F(x,y,z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2 - 1 = 0$

3. $F(x,y,z) = \sin(yz) + \cos(xz) + \tan(xy) - 1 = 0$

4. $F(x,y,z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 1 = 0$

5. $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + 1 = 0$

3. Aşağıda $F(x,y,z) = 0$ deklemiyle verilen $z = f(x,y)$ kapalı fonksiyonun yanlarındaki noktadaki ikinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

1. $F(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2 = 0$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

2. $F(x,y,z) = y - xz + \cos(xyz) - 3 = 0$, $(1,0,-2)$

3. $F(x,y,z) = \sin(x+y) + \sin(y+z) + \cos(x+z) - 1 = 0$, $(\pi, -\pi, \pi)$

4. $F(x,y,z) = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} - 3 = 0$, $(1,-1,1)$

4. $x = x(y,z), y = y(x,z)$ ve $z = z(x,y)$ olmak üzere $F(x,y,z) = 0$ denklemiyle verilen fonksiyonun $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1$ kısmi diferensiyel denklemini gerçeklediğini göstériniz.

5. $F(x,y) = 0$ denklemiyle verilen $y = f(x)$ fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin

$$y''(x) = -\frac{F_y^2F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + F_x^2 + F_{yy}}{F_y^2}$$

olduğunu gösteriniz.

6. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,u,v) = (u^3 + xv + y, yu + v^3 - x)$ için $F(x,y,u,v) = 0$ denklem sisteminden hangi şartlar altında u, v nin x, y cinsinden çözülüp çözülemeyeceğini araştırınız.

7. Aşağıdaki denklem sistemlerinin $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ kısmi türevlerini bulunuz.

1. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - u_1u_2^2 = 0 \\ x_1u_2 - x_2u_1 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2u_1^2u_2 + 1 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + u_1^2 - u_1u_2 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + 2u_1u_2 = 0 \\ -2x_1x_2 + u_1^2 + u_2^2 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0 \\ x_1x_2u_1u_2 = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1^2x_2 + u_1^2 - 2u_2u_3^2 = 0 \\ x_1 - x_2^2u_3 + u_2^2 - u_1 = 0 \\ x_1x_2 - u_1u_2u_3^2 - 2 = 0 \end{cases}$

8. Aşağıdaki denklem sistemlerine yanlarındaki noktada kapalı fonksiyon teoremini uygulayınız ve kısmi türevlerini hesaplayınız.

1. $\begin{cases} x^2u + yv^2 = 0 \\ xv^2 - 2y^2u + 1 = 0 \end{cases}$ $P = (1,-1,1,1)$

2. $\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3u^4 + 8 = 0 \end{cases}$ $P = (2,-1,2,1)$

3. $\begin{cases} 4xy + y^2u - v^3 - 3 = 0 \\ 5x^2 - uvy^2 + 3v^3 + 4 = 0 \end{cases}$ $P = (1,-2,3,1)$

4. $\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0 \\ yzu^3 + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0 \end{cases}$ $P = (1,1,1,1,1)$

7.2 Ters Fonksiyon Teoremi.

Bu kısımda ters fonksiyon teoremi ele alınacaktır. Tek değişkenli fonksiyonlardaki durum hatırlanırsa $A, B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to B$ fonksiyonunun tersinin olması için gerek ve yeter şart birebir ve örten olmasıdır. Bu durumda verilen fonksiyonun $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

olarak tanımlanır. Üstelik f fonksiyonu A kümesinde türevlenebilir ve $x_0 \in A$ için $f'(x_0) \neq 0$ ise f nin f^{-1} ters fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ da türevlenebilir ve türevi

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dir.

7.2.4 Alıştırmalar.

1. $$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $x_0 = 0$ noktasının bir komşuluğunda tersinin olup olmadığını araştırınız.

2. $u = 2x + 3yz,\ v = x + x^2yz,\ w = 3x + 2y - 5z$ denklem sisteminin $P_0 = (0,0,0)$ noktasının uygun bir komşuluğunda x, y, z nin u, v ve w cinsinden çözülüp çözülemeyeceğini araştırınız.

3. $A \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu birebir, sürekli, diferensiyellenebilir ve $\det(Df(x)) \neq 0$ olsun. Bu takdirde $f^{-1} : f(A) \to A$ ters fonksiyonunun da diferensiyellenebilir olduğunu gösteriniz.

4. $i = 1, 2$ için $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (ax_1 + bx_2 + c_1, ax_2 + bx_2 + c_2)$$

olarak tanımlanan fonksiyonunun tersinin olup olmadığını araştırınız ve tersinin olduğu noktalardaki türevlerini hesaplayınız.

5.
$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; f(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

fonksiyonunun $(-1, 1)$ noktasının uygun bir komşuluğunda ters fonksiyonunun olup olmadığını araştırınız.

6. Aşağıdaki denklem sistemlerinin hangi koşullar altında tersinin olduğunu belirleyiniz ve bu koşullardaki kısmi türevlerini hesaplayınız.

1. $\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = y_1 \\ x_1^2 - x_2^2 = y_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_2 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_3 \end{cases}$

7.
$$\begin{aligned} 3x - \cos y + y + e^z &= 0 \\ x - e^x - y + z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin $(0, 0)$ noktası civarında tersinin olup olmadığını araştırınız, tersi varsa bu noktadaki kısmi türevlerini hesaplayınız.