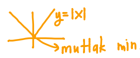
Maksimum, Minimum Problemleri

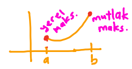
Hatırlatma

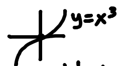
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f'nin min/maks olduğu yerler:

Kritik Nokta 1) $f'(x)=0$ 

2) $f'(x)$ tanımsız 

3) f'nin tanım kümesinin uç noktaları. 

ÖR $f(x)=x^3$ $\quad f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$ 

Kritik nokta. f bu noktada min/maks olmuyor.

İkinci Türev testi

$f'(x_0)=0$

$f''(x_0)>0 \Rightarrow$ yerel min.

$f''(x_0)<0 \Rightarrow$ yerel maks.

$f''(x_0)=0 \Rightarrow$ test sonuç vermez.

ispat. $f(x)=f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)}_{0}(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$

c x ile x_0 arasında.

$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)$

$f''(x_0)>0 \Rightarrow f''(c)>0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)>0 \Rightarrow f(x_0)=\min$

İki değişkenli fonksiyonlar.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Kritik Noktalar. $f_x(x_0,y_0)=0$

$f_y(x_0,y_0)=0$

İkinci Türev Testi.

$\Delta f = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$.

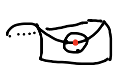
(x_0,y_0) noktasında. $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

1) $\Delta>0$ ve $f_{xx}>0 \Rightarrow f(x_0,y_0)$ yerel min. ($\Delta>0$ ve $f_{yy}>0$)

2) $\Delta>0$ ve $f_{xx}<0 \Rightarrow f(x_0,y_0)$ yerel maks.

3) $\Delta<0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ f'nin bir eyer noktasıdır.

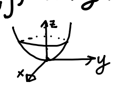
Yani $f(x_0,y_0)$ ne bir yerel maks.tır ne de bir yerel min.dir.



ispat. $f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x\underbrace{(x_0,y_0)}_{0}(x-x_0)$
$+f_y\underbrace{(x_0,y_0)}_{0}(y-y_0)$
$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(c,d)(x-x_0)^2 + f_{xy}(c,d)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(c,d)(y-y_0)^2\right]$

4) $\Delta=0 \Rightarrow$ 2. türev testi sonuç vermez.

ÖR $f(x,y)=x^2+y^2$. Min/maks aldığı noktaları belirle.



$\left.\begin{array}{l} f_x=2x=0 \\ f_y=2y=0 \end{array}\right\}$ $x=y=0$. Kritik nokta: $(0,0)$. $\quad f_{xx}=2 \quad f_{xy}=0 \quad f_{yy}=2$

$\left.\begin{array}{l} \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\cdot 2-0^2=4. \\ f_{xx}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0,0)$ bir yerel min.

$f(x,y)\geq 0 \Rightarrow f(0,0)$ mutlak min.

$\underline{\text{ÖR}}$. $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$.

$f_x = 6x^2-6y=0$ $\quad 6x^2-6x=0 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x=0,\ x=1.$

$f_y=-6x+6y=0 \Rightarrow x=y$

Kritik noktalar: $(0,0)$, $(1,1)$.

$f_{xx}=12x$, $\quad (0,0)$: $\Delta = f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 = \cancel{0\cdot 6}^{\,0} - (-6)^2 = -36<0$

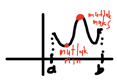
$f_{xy}=-6$ $\quad \to$ eyer noktası.

$f_{yy}=6$ $\quad (1,1)$: $\left.\begin{array}{l}\Delta = 12\cdot 6-(-6)^2=36>0\\ f_{xx}(1,1)=12>0\end{array}\right\}\Rightarrow$ $(1,1)$ noktasında yerel min

25/04/2020

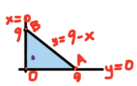
Kapalı ve Sınırlı Bölge Üzerinde Min/Maks.

$\underline{\text{Teorem}}$. $B\subset\mathbb{R}^2$ $f: B\to\mathbb{R}$ sürekli ve B bölgesi sınırlı ve kapalıysa $\Rightarrow$ f B üzerinde mutlak min ve mutlak maks. değerlerini alır.

Hatırlatma 

$\underline{\text{Ör}}$ $f(x,y)=2+2x+4y-x^2-y^2$. $\quad B\subseteq\mathbb{R}^2$: $x=0$, $y=0$ ve $y=9-x$ doğruları ile sınırlanmış bölge.

f'nin B üzerindeki mutlak min ve mutlak maks. değerlerini bulun.

$\underline{\text{Çözüm}}$ 

İç kritik noktalar: $\begin{array}{l} f_x = 2-2x=0\\ f_y\ =4-2y=0\end{array} \Rightarrow (1,2)$

Sınırdaki kritik noktalar:

(i) OA doğru parçası. $f(x,y)=f(x,0)=2+2x-x^2$, $\ 0\leqslant x\leqslant 9$

$\qquad f'(x,0)=2-2x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0),\ (0,0),\ (9,0)$

(ii) OB üzerinde. $\underbrace{f(0,y)=2+4y-y^2}_{0\leqslant y\leqslant 9} \Rightarrow f'(0,y)=4-2y=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (0,2),\ \underline{(0,0)},\ (0,9)$

(iii) AB üzerinde: $f(x,y)=f(x,9-x)=2+2x+4(9-x)-x^2-(9-x)^2$, $\ 0\leqslant x\leqslant 9$.

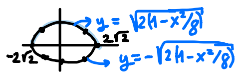
$\qquad f'(x,9-x)=0 \Rightarrow 16-4x=0 \Rightarrow x=4,\ y=5 \Rightarrow (4,5),\ \underline{(0,9)},\ \underline{(9,0)}.$

$f(1,2)=7$, $f(0,0)=2$, $f(9,0)=-61$, $f(0,9)=-43$, $f(1,0)=3$, $f(0,2)=6$, $f(4,5)=-11$.

$\downarrow$ mutlak maks. $\qquad\qquad \downarrow$ mutlak min.

LAGRANGE ÇARPANLARI

Ör. $f(x,y)=xy$ fonkunun $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$ elipsi üzerindeki min/maks. değerlerini belirleyin.



1. yöntem. Elipsin üstü: $f\left(x,\sqrt{2(1-x^2/8)}\right)=x\sqrt{2(1-x^2/8)}=g(x)$, $-2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$.

$g'(x)=0$ --- Ödev olarak yapın.

Elipsin altı: ...

2. yöntem. Lagrange çarpanı yöntemi.

$g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1$. $\nabla f=\lambda\nabla g$ $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j=y\,i+x\,j$, $\nabla g=\frac{x}{4}i+y\,j$

$$y\,i+x\,j=\lambda\left(\frac{x}{4}i+yj\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=\lambda x/4\\ x=\lambda y\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0\end{array}\right\}y=\frac{\lambda^2}{4}y\Rightarrow\cancel{y=0},\ \frac{\lambda^2}{4}=1\Rightarrow\lambda=\mp2.$$

1. durum. $y=0$, $x=0\Rightarrow$ Elips üzerinde değil.

2. durum. $y\neq0$, $\lambda=\mp2\Rightarrow\frac{\lambda^2y^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$ ($\lambda^2 = 4$)

$y^2=1\Rightarrow y=\mp1$, $x=\lambda y$

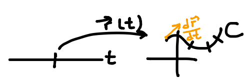
$(2,1),(-2,1),(-2,-1),(-2,1)$.

$f(2,1)=2=f(-2,-1)$, $f(-2,1)=f(2,-1)=-2$

Mutlak min$=-2$, mutlak maks$=+2$.

Teorem. $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ türetilebilir. $C\subset A$ düzgün bir eğri olsun.

C: $\vec{r}(t)=x(t)\,i+y(t)\,j$



Eğer f C üzerindeki bir P_0 noktasında min/maks oluyorsa $\Rightarrow$ $\nabla f(P_0)$ C'ye diktir.

İspat $f(x(t),y(t))=f$'nin C'ye kısıtlanması.

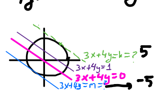
$$\frac{d}{dt}f=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j\right)=\nabla f\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{df}{dt}=0\Leftrightarrow\nabla f\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=0\quad\blacksquare$$

Lagrange Çarpan Yöntemi

Eğer C eğrisi bir $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonk.unun seviye eğrisi ise ∇g C eğrisine diktir ve ∇f P_0 noktasında C'ye dik olduğundan $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ $\nabla f=\lambda\nabla g$

Ör. $f(x,y)=3x+4y$ fonk.unun $x^2+y^2=1$ üzerinde aldığı min/maks değerleri bulun.

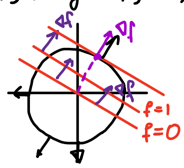


$$\begin{cases} g(x,y)=x^2+y^2-1=0 , \quad \nabla f=\lambda \nabla g \qquad \nabla f = 3i+4j=\lambda\nabla g=\lambda(2xi+2yj) \\ 3=\lambda 2x \\ 4=\lambda 2y \end{cases}$$

$\lambda\neq 0 \Rightarrow x=\frac{3}{2\lambda},\ y=\frac{2}{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{9}{4\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}=1 \Rightarrow \lambda^2=\frac{9}{4}+\frac{16}{4} \Rightarrow \lambda=\mp\frac{5}{2}.$

$\lambda=5/2 \Rightarrow x=3/5,\ y=4/5 \Rightarrow f\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{9}{5}+\frac{16}{5}=5$ Mutlak maks.

$\lambda=-5/2 \Rightarrow x=-3/5,\ y=-4/5 \Rightarrow f\left(\frac{-3}{5},\frac{-4}{5}\right)=-\frac{9}{5}-\frac{16}{5}=-5.$ Mutlak min.



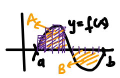
Uyarılar. (1) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ve $g(x,y,z)=0$ $\quad \nabla f=\lambda\nabla g \quad \frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k=\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}i+\frac{\partial g}{\partial y}j+\frac{\partial g}{\partial z}k\right)$

(2) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ve $g_1(x,y,z)=0$ ve $g_2(x,y,z)=0 \Rightarrow \nabla f=\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2$

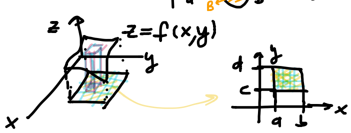
9/05

ÇOK KATLI İNTEGRALLER

Hatırlatma. $\int f(x)dx=F(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$



$\int_a^b f(x)dx=A-B \qquad$ Riemann Toplamı $=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1}) \xrightarrow{\Delta x_k\to 0} \int_a^b f(x)dx$

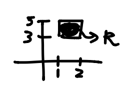


Riemann Toplamı $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij})\,(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) \xrightarrow[\Delta y\to 0]{\Delta x\to 0} \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

fonk.un grafik yüzeyinin altında kalan işaretli hacim.

ÖR. $1\leq x\leq 2,\ 3\leq y\leq 5$ olan dikdörtgensel bölgesi R üzerinde $f(x,y)=7$ için

$\iint_R 7\,dA=$ Taban Alanı $\times$ Yükseklik $=(2\cdot 1)\cdot 7=14. \qquad R=\{(x,y):\ 1\leq x\leq 2,\ 3\leq y\leq 5\}$



Sıralı İki katlı integraller.

ÖR $\int_1^2\left[\int_3^x (x^2+y)\,dy\right]dx=\int_1^2\left[x^2y+\frac{y^2}{2}\Big|_{y=3}^{x}\right]dx=\int_1^2\left[x^3+\frac{x^2}{2}-3x^2-\frac{9}{2}\right]dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3\cdot 2}-x^3-\frac{9}{2}x\Big|_{x=1}^{2}=$

$=\frac{16}{4}+\frac{8}{6}-8-9-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-1-\frac{9}{2}\right)$ ✓

Fubini Teoremi. $f: B\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. $B=\{(x,y):\ a\leq x\leq b,\ g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$ olsun. (Bu tip bölgelere 1. tip bölge denir).

$$\iint_B f(x,y)\,dA=\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

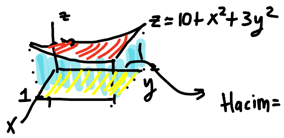
ÖR. B: $0\leq x\leq 2,\ -1\leq y\leq 1$. $f(x,y)=100-6x^2y$

$\iint_B f(x,y)dA=\int_{x=0}^{2}\left[\int_{y=-1}^{1}(100-6x^2y)\,dy\right]dx=\int_{x=0}^{2}\left[100y-\frac{6x^2y^2}{2}\Big|_{y=-1}^{1}\right]dx=\int_{x=0}^{2}100-3x^2-(-100-3x^2)\,dx$

$=\int_{x=0}^{2}200\,dx=200\cdot 2=400.$

$$\int_{y=-1}^{1} \int_{x=0}^{2} (100-6xy^2)\, dx\, dy = \cdots = 400.$$

<u>ÖR</u>. $z=10+x^2+3y^2$ yüzeyinin altında ve $R: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$ bölgesinin üzerindeki hacmi bulun.



$$\text{Hacim} = \iint_R f(x,y)\, dA = \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{2} (10+x^2+3y^2)\, dy \right] dx = \frac{86}{3}.$$

$$= \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} (10+x^2+3y^2)\, dx\, dy$$

<u>ÖR</u>. $\iint_R xye^{xy^2}\, dA$, $R: 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$.

<u>1.yol</u> $\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1} xy\, e^{xy^2}\, dy\, dx \rightarrow \int xye^{xy^2} dy = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{e^u}{2} + c = \frac{e^{xy^2}}{2} + c$

$u = xy^2$
$du = 2xy\, dy$

$$\int_{x=0}^{2} \left(\frac{e^{xy^2}}{2} + c \right) \Big|_{y=0}^{1} dx = \int_{x=0}^{2} \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}\, dx = \frac{e^x}{2} - \frac{x}{2} \Big|_{x=0}^{2} = \frac{e^2}{2} - 1 - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \checkmark$$

<u>2.yol</u>. $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{2} xye^{xy^2}\, dx\, dy$ = bu integrali hesaplayamıyoruz.

$xy^2 = u$
$y^2 dy = du$