Mat 2012 Analiz 4 - 5. Hafta Ders Sunumu

Taylan Şengül

Marmara Üniversitesi

23/03/2020

Üç Boyutlu Uzayda Vektörler

3 boyutlu uzayda i, j ve k sırasıyla x, y ve z ekseni doğrultusundaki birim vektörler olmak üzere herhangi bir vektörü

$$\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

olarak yazabiliriz. Burada u_1, u_2, u_3 reel sayılarına u vektörünün **bileşenleri** denir. Tüm bileşenleri sıfır olan vektöre, **sıfır vektörü** denir

$$\vec{0} = 0i + 0j + 0k$$

İki vektörü toplama ve bir vektörle bir skalerin çarpım işlemlerinin ve bu işlemlerin sağladığı özelliklerin bilindiğini varsayıyoruz. $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ vektörünün **boyu**

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

olarak tanımlanır.

İÇ ÇARPIM

$\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ ve $\vec{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ şeklinde iki vektörün **iç çarpımı**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

olarak tanımlanır. Aşağıdaki özellikler bütün vektörler ve skalerler için geçerlidir.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
2. $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$,
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
4. $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c\vec{v}) = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
5. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

İç çarpım sayesinde iki vektör arasındaki açı belirlenebilir.

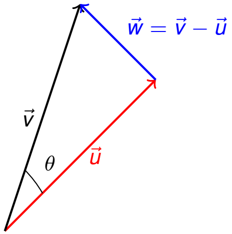
Lemma

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı θ ise,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta \tag{1}$$

olur.

İspat.



Bu eşitlik kosinüs teoreminden elde edilen

$$(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$

ifadesini açarak elde edilir.

(1) bağıntısının bazı sonuçları şöyledir.

1. İki vektör ancak ve ancak iç çarpımları sıfır ise birbirine diktir, yani aralarındaki açı 90° olur.
2. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| |\cos\theta|$ bağıntısı her $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri için geçerli olan ünlü Cauchy-Schwartz eşitsizliğini verir.

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|$$

Yani

$$|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3| \leq (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$$

Vektörel Çarpım

$\vec{u} \neq \vec{0}$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ olsun. Hem $\vec{u}$ hem de $\vec{v}$ vektörlerine dik olan ve sağ el kuralı ile belirlenen bir tek birim vektör vardır. Bu vektöre $\vec{n}$ diyelim.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \sin\theta)\vec{n}$$

olarak tanımlanır. Eğer vektörlerden biri $\vec{0}$ ise, vektörel çarpım $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ olarak tanımlanır.
Sıfırdan farklı $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektörleri ancak ve ancak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ ise paraleldir. Özel olarak da $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ olur.

Lemma

Aşağıdaki özellikler her $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri ve her r, s skalerleri için geçerlidir.

1. $(r\vec{u}) \times (s\vec{v}) = (rs)(\vec{u} \times \vec{v})$,
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{u} \times \vec{w}$,
3. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,
4. $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$,
5. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

Vektörel çarpımın tanımı sebebiyle

$$i \times j = k, \qquad j \times k = i, \qquad k \times i = j$$

olur. Bu özellikler kullanılarak $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ ve $\vec{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ vektörleri için, vektörel çarpımın

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= i(u_2 v_3 - u_3 v_2) - j(u_1 v_3 - u_3 v_1) + k(u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{aligned}$$

olduğu gösterilir.
Vektör çarpımının birleşme özelliği yoktur. Örneğin

$$-j = i \times k = i \times (i \times j) \neq (i \times i) \times j = \vec{0}.$$

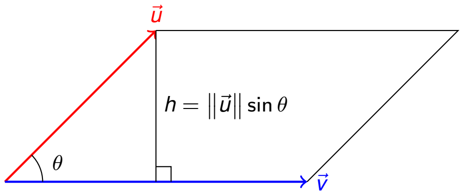
olur.

Vektörel Çarpımın Geometrik Anlamı

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ tarafından gerilen paralelkenarın alanı

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta$$

olur. Gerçekten de $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ tarafından gerilen paralelkenarda, $\|\vec{v}\|$ taban uzunluğunu, $\|\vec{u}\| \sin\theta$ ise yüksekliği verir.



Üç Boyutlu Uzayda Parametrik Doğrular

Bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{v} = ai + bj + ck$ doğrultmanına sahip bir doğrunun parametrik denklemi

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılır. Burada $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, doğrunun üzerindeki bir noktanın pozisyon vektörü, $\vec{r}_0$ ise P noktasının pozisyon vektörüdür, yani $\vec{r}_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k$ şeklindedir. Her $t \in \mathbb{R}$ için yukarıdaki bağıntı, doğru üzerindeki başka bir noktanın pozisyon vektörüdür. Bu doğruyu tarif etmenin başka bir yolu da

$$x(t) = x_0 + ta, \qquad y(t) = y_0 + tb, \qquad z(t) = z_0 + tc.$$

şeklindedir. Eğer bu denklemden t'yi çekersek ve $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ olduğunu kabul edersek, doğrunun

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

standart denklemlerini elde ederiz.

Örnek

$(-3,2,-3)$ *ve* $(1,-1,4)$ *noktalarından geçen doğrunun standart denklemlerinin*

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-4}{7}$$

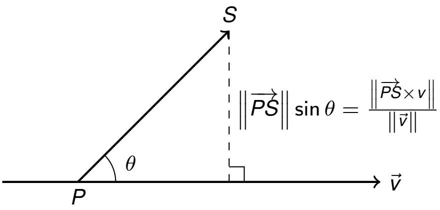
olduğunu gösterin.

Örnek

Bir S noktasının, P noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{v}$ olan bir doğruya uzaklığının

$$\frac{\left\|\overrightarrow{PS}\times v\right\|}{\|\vec{v}\|}$$

olduğunu gösterin.



Üç Boyutlu Uzayda Düzlemler

Bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktası ve $\vec{n} = ai + bj + ck$ normal vektörü bilinen bir düzlem üzerinde herhangi bir $P(x, y, z)$ noktası alırsak,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

olur. Bu da

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

veya

$$ax + by + cz = d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

olarak ifade edilebilir.
Tersine olarak düşünürsek,

$$ax + by + cz = d$$

denklemi, normali $ai + bj + ck$ vektörü olan düzlemin denklemidir.
Bir düzlemin normal vektörünün tek olmadığına dikkat edilmelidir.

ÖRNEK

$P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$, $R(5,2,0)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini yazın.

ÇÖZÜM

Düzlemin $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ olarak alabiliriz. Buradan

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12i + 20j + 14k$$

bulunur. $P(1,3,2)$ noktasını alırsak, düzlemin denklemini

$$12(x-1) + 20(y-3) + 14(z-2) = 0$$

olarak buluruz.

ALIŞTIRMALAR

1. Köşegenleri birbirine dik bir dikdörtgen karedir. Gösterin.
2. Bir paralelkenar ancak ve ancak köşegenleri aynı uzunluktaysa, bir dikdörtgendir. Gösterin.
3. $\vec{u} \cdot \vec{u}_1 = \vec{u} \cdot \vec{u}_2$ ise $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ olmak zorunda mıdır?
4. Köşeleri $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ ve $R(-1, 1, 2)$ noktalarında olan üçgenin alanının $3\sqrt{2}$ olduğunu gösterin.
5. $i + 2j - k$, $-2i + 3k$ ve $7j - 4k$ vektörleri tarafından gerilen paralelyüzlünün hacminin 23 birim küp olduğunu gösterin.
6. Herhangi bir üçgende, iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru üçüncü kenara paraleldir, uzunluğu ise üçüncü kenarın uzunluğunun yarısıdır.
7. $S(1, 1, 5)$ noktası ile parametrik denklemi $x = 1 + t$, $y = 3 - t$, $z = 2t$ olan doğru arasındaki mesafenin $\sqrt{5}$ olduğunu gösterin.