MAT 2012 ANALIZ 4 - 6. HAFTA DERS SUNUMU

Taylan Şengül

Marmara Üniversitesi

29/03/2020

$\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ için, bir **vektör değerli fonksiyon** denir.
$\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durumunda

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

olarak yazılabilir. **f** fonksiyonun görüntü kümesine $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir **eğri**, **f** fonksiyonuna ise bu eğrinin bir **parametrizasyonu** denir.

$\mathbf{f}(t) = \ln t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{1 - t^2}\mathbf{k}$ fonksiyonunun tanım kümesi $(0, 1]$ olur.

$\mathbf{f}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$ fonksiyonu birim çemberin bir parametrizasyonudur. Başka bir deyişle **f** fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}^2$ de birim çemberdir.

$\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ve $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ise $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$ olarak tanımlarız. Benzer şekilde $\mathbf{f} - \mathbf{g}$, $(h\mathbf{f})$, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$, $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$, $\mathbf{f} \circ h$ fonksiyonları tanımlanır.

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}\| < \epsilon$$

koşulu sağlanırsa, $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}$ deriz.

Gösterilebilir ki

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

fonksiyonunun bir t_0 noktasındaki limiti ancak ve ancak x, y ve z skaler fonksiyonlarının t_0 noktasında limiti varsa vardır ve bu durumda

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} x(t) \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{t \to t_0} y(t) \right) \mathbf{j} + \left(\lim_{t \to t_0} z(t) \right) \mathbf{k}$$

1. $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(t)) = \left(\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)\right) + \left(\lim_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)\right)$,
2. $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)) = \left(\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)\right) \cdot \left(\lim_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)\right)$,
3. $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)) = \left(\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)\right) \times \left(\lim_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)\right)$
4. $\lim_{t\to t_0}(h(t)\mathbf{f}(t)) = \left(\lim_{t\to t_0}h(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)\right)$

gibi klasik limit kuralları geçerlidir.

- Eğer $\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)$ ise **f** vektör değerli fonksiyonuna t_0 noktasında **sürekli** deriz. Eğer bu fonksiyon tanım kümesindeki her noktada sürekli ise, fonksiyonun kendisine **sürekli** deriz.
- Gösterilebilir ki

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

  fonksiyonu bir t_0 noktasında süreklidir ancak ve ancak x, y ve z skaler fonksiyonları t_0 noktasında sürekliyse.

> $\mathbf{f}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2 - 4}\mathbf{j}$ fonksiyonu tanımlı olduğu $(0, 2) \cup (2, \infty)$ kümesi üzerinde süreklidir.

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)}{h}$$

limiti varsa **f** fonksiyonuna t noktasında **türetilebilir** denir.

$\mathbf{f}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ fonksiyonunun türevi $\mathbf{f}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ olur.

Eğer **u** ve **v** türetilebilir fonksiyonlar, **c** sabir vektör, c skaler ve f türetilebilir bir skaler fonksiyon ise

1. $\frac{d}{dt}\mathbf{c} = \mathbf{0}$,
2. $\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$
3. $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$,
4. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$
5. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$
6. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$.

ispat. Örneğin $\mathbf{u} = u_1(t)\mathbf{i} + u_2(t)\mathbf{j} + u_3(t)\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}$ olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}\left(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\right) \\
&= \underbrace{u_1' v_1 + u_2' v_2 + u_3' v_3}_{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}} + \underbrace{u_1 v_1' + u_2 v_2' + u_3 v_3'}_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'}
\end{aligned}$$

olur.

Parametrik Eğriler

$$\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

olsun. x ve y, t'nin türetilebilir fonksiyonları olsun. $\mathbf{r}$ fonksiyonun görüntü kümesi olan

$$\mathbf{r}(I) = \left\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\right\}$$

kümesine $\mathbb{R}^2$'de tanımlı bir **eğri** ve

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

vektörüne, eğer sıfır vektörü değilse, bu eğrinin **teğet vektörü** denir. Benzer bir şekilde $\mathbb{R}^3$'teki eğriler de tanımlanabilir.

Örnek

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$ olsun. $x = t$, $y = t^2$ yazıp t'yi elimine edersek, $y = x^2$ denklemini buluruz. Yani $x(t) = t$ ve $y(t) = t^2$ parametrik denklemleri, $y = x^2$ parabolünün bir parametrizasyonudur. Bu eğrinin teğet vektörü

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

olur.

Her tek değişkenli sürekli $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği bir eğri tanımlar ve bu eğri $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$ denklemi ile parametrize edilebilir. Ancak tersine $\mathbb{R}^2$'deki her eğri bir fonksiyonunun grafiği değildir. Örneğin $x^2 + y^2 = 1$ çemberi bir fonksiyonun grafiği olarak yazılamaz.

$x^2 + y^2 = 1$ çemberi parametrik olarak $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$ şeklinde yazılabilir. Aslında bir eğri sonsuz farklı parametrik denklemle tanımlanabilir. Örneğin $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j}$ denklemi de aynı çemberi tanımlar.

$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ parametrik denklemi $\mathbb{R}^3$'de bir helis tanımlar.

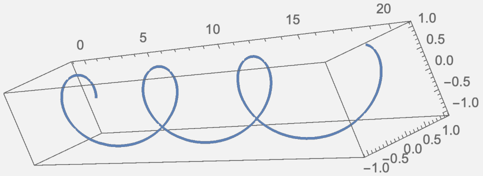

FIGURE: Helis grafiği.

Bir eğriyi tanımlamanın diğer bir yolu, eğriyi iki değişkenli reel değerli bir fonksiyonunun seviye eğrisi olarak tanımlamaktır.

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$C_k = \{(x, y) \in A : f(x, y) = k\}$$

kümesine f'nin bir **seviye kümesi** denir.

$k \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ ve $k \neq m$ is $C_k \cap C_m = \emptyset$ olacağı açıktır zira $(x, y) \in C_k \cap C_m$ ise $f(x, y) = k$ ve $f(x, y) = m$ olduğundan $k = m$ olur.

Teorem

Eğer $(x_0, y_0) \in C_k$ ve $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ ise (x_0, y_0) noktasının öyle bir $B \subset A$ açık komşuluğunu bulabiliriz ki $C_k \cap B$ kümesi bir eğridir.

Belirtilen fonksiyonların seviye kümelerini ve seviye eğrilerinin parametrik denklemlerini belirleyin.

$f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun seviye kümeleri $k < 0$ için boş küme, $k = 0$ için sadece orijin noktası, $k > 0$ için ise $\sqrt{k}$ yarıçaplı ve orijin merkezli çember olur. Bu çemberler her $k > 0$ için

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{k}\cos t\mathbf{i} + \sqrt{k}\sin t\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

denklemiyle parametrize edilebilir.

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$ fonksiyonunun seviye kümeleri $k < 0$ için boş küme, $k = 0$ için sadece orijin noktası, $k > 0$ için ise

$$2x^2 + y^2 = k = 2x_0^2 + y_0^2$$

denklemiyle tanımlı elipslerdir. Bu elipsler

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{\frac{k}{2}}\cos t\mathbf{i} + \sqrt{k}\sin \mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

denklemiyle parametrize edilebilir.

$f(x, y) = e^{x+2y}$ fonksiyonunun her $k \in \mathbb{R}$ için seviye eğrileri $x + 2y = k$ doğrularıdır. Bu doğrular $y = t$ ve $x = k - 2t$ denklemi veya kısaca

$$\mathbf{r}(t) = (k - 2t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

denklemiyle parametrize edilebilir.

Seviye egrileri teoremi

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ türetilebilir bir fonksiyon, C eğrisi ise f'nin bir seviye eğrisi olsun. Bu durumda ∇f vektörü C eğrisine (yani C eğrisinin teğet vektörüne) diktir.

ispat

C eğrisinin $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t \in I$ şeklinde parametrize edildiğini kabul edelim. Dolayısıyla bir $k \in \mathbb{R}$ için

$$f(x(t), y(t)) = k, \qquad \forall t \in I$$

olmalıdır. Yukarıdaki denklemde her iki tarafın d/dt türevini alırsak,

$$0 = \frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

buluruz.

Bir topoğrafik haritadaki izohipslerdir yükseklik fonksiyonun seviye eğrileridir. Yukarıdaki teoreme göre bir topoğrafya haritasında nehirler izohipslere diktirler.