Analiz 4 Ders Notları

Taylan Şengül

8 Temmuz 2022

Lütfen gördüğünüz hataları bildiriniz.

İçindekiler

İçindekiler **1**
Limit . . . 2
Süreklilik . . . 11
Kısmi Türevler . . . 13
Türetilebilme . . . 19
Zincir Kuralı . . . 23
Kapalı ve Ters Fonksiyon Teoremleri . . . 26
Yönlü Türev . . . 30
Analitik Geometri. Vektörler, Doğrular ve Düzlemler . . . 33
Teğet Düzlem . . . 38
Ektremum Problemleri . . . 47
Lagrange Çarpanları Yöntemi . . . 52
Çok Katlı Riemann İntegralinin Tanımı . . . 56
İki Katlı İntegrallerin Hesaplanması . . . 60
İki Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme . . . 62
Üç Katlı İntegraller . . . 64
Eğrisel İntegraller . . . 66
Zorunlu Olmayan Bilgiler . . . 67

Kaynakça 71

Limit

Ön Tanımlar

Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Kartezyen düzlem olan R^2 kümesi

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanır.

İki $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ noktası arasındaki mesafe

$$\|(x_0, y_0) - (x_1, y_1)\| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1. *r pozitif bir sayı, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ olsun.*

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$$

*kümesine (x_0, y_0) merkezli ve r yarıçaplı **açık disk** denir. $A \subset \mathbb{R}^2$ olsun ve $(x, y) \in a$ olsun. Eğer A'nin içinde kalan (x, y) merkezli bir açık disk varsa, (x, y) noktasına A'nın bir **iç noktası** denir.*

Örnek 1. *$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ olsun. (i) $(1, 2)$ noktası A kümesinin bir iç noktası mıdır? (ii) $(0, 3)$ noktası A kümesinin bir iç noktası mıdır?*

Çözüm. *(i) Evet. Çünkü $B_{1/2}(1, 2) \subset A$ olur. Gösterin. (ii) Hayır. Çünkü olsaydı bir $r > 0$ için $B_r(0, 3) \subset A$ olurdur. Ama $(-r/2, 3) \in B_r(0, 3)$ ve $(-r/2, 3) \notin A$ olduğundan $B_r(0, 3)$ açık diski A'nın alt kümesi değildir.*

Tanım 2. *Eğer A'nın her noktası bir iç noktaysa, A kümesine bir **açık küme** denir. (x, y) noktasını içeren bir açık kümeye (x, y) noktasının bir **komşuluğu** denir. $A \subset \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer $\mathbb{R}^2 \setminus A$ kümesi açıksa R kümesine **kapalı küme** denir.*

Bu derste temel olarak iki değişkenli gerçel-değerli fonksiyonlardan bahsedeceğiz. Yaptığımız şeyler genellikle kolay bir biçimde üç veya daha çok değişkenli ve gerçel-değerli fonksiyonlara da genişletilebilir. İki değişkenli bir fonksiyonu tanımlarken tanım kümesinin verilmesi gerekir. Mesela $A \subset \mathbb{R}^2$ kümesi f gerçel değerli fonksiyonunun tanım kümesi ise $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olarak yazarız. Eğer fonksiyonu tanımlarken tanım kümesini belirtmez isek, tanım kümesi fonksiyonun kuralının tanımlı olduğu tüm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ikililerinin kümesi olur.

Örnek 2. *$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ fonksiyonun tanım kümesi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ kümesidir.*

Örnek 3. $f(x,y)=\frac{1}{xy}$ *fonksiyonun tanım kümesini yazınız.*

Eğer $f: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ve $g: B\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ise, $f+g: A\cap B\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$$

olarak tanımlanır. İki fonksiyonun çarpımı, farkı ve bölümü de (sıfıra bölmemeye dikkat ederek) benzer şekilde tanımlanır. Eğer $f: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ise $g\circ f: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ bileşke fonksiyonu

$$(g\circ f)(x,y)=g(f(x,y))$$

olarak tanımlanır.

Örnek 4. *İki değişkenli gerçel değerli bir fonksiyonun bir seviye eğrisi fonksiyonun sabit değere eşit olduğu noktalar kümesidir.* $f(x,y)=x^2+y^2$ *fonksiyonun 3 boyutlu uzayda grafiğini çizip* xy *düzlemi üzerinde seviye eğrilerini gösterin. Bu fonksiyonun seviye eğrileri* $x^2+y^2=c$ *eşitliğini sağlar. Bu fonksiyonun seviye eğrileri* xy *düzleminde orijin merkezli çemberlerdir.*

Limit

Tanım 3. $A\subset\mathbb{R}^2$ *ve* $f: A\to\mathbb{R}$ *olsun. Eğer her* $\epsilon>0$ *için*

$$\forall(x,y)\in A,\quad 0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \implies |f(x,y)-L|<\epsilon \tag{1}$$

şartını sağlayan bir $\delta>0$ *bulabiliyorsak* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ *yazılır.*

Uyarı 1.

1. *Limitin alındığı* (x_0,y_0) *noktasında fonksiyonun tanımlı olması yani* $(x_0,y_0)\in A$ *olması gerekmez. Ancak* (x_0,y_0)*'ın* A *kümesinin bir* ***yığılma noktası*** *olması gerekir. Bu her* $\delta>0$ *için*

$$0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$$

şartını sağlayan bir $(x,y)\in A$ *elemanın olması anlamına gelir. Yani limit alınan noktaya istenildiği kadar yakın bir* $(x,y)\in A$ *noktası olmalıdır.*

2. *Eğer fonksiyon* (x_0,y_0) *noktasında tanımlı ise* $f(x_0,y_0)=L$ *olması gerekmez. Bu durumda fonksiyona* (x_0,y_0) *noktasında süreksiz diyeceğiz.*

Limit için yeter koşul.

$$|x-x_0|\le\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2},\quad |y-y_0|\le\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2}.$$

olduğundan,

$$\forall(x,y)\in A,\quad |x-x_0|<\delta \text{ ve } |y-y_0|<\delta \implies |f(x,y)-L|<\epsilon \tag{2}$$

gösterilirse, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ olur.

Örnek 5. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} 2x + y = 4$ *olduğunu* $\epsilon - \delta$ *tanımını kullanarak ispatlayın.*

Çözüm. $\epsilon > 0$ *için* $\delta = \epsilon/3$ *seçilirse, yani* $|x-1| < \epsilon/3$ *ve* $|y-2| < \epsilon/3$ *ise*

$$|2x + y - 4| = |2(x-1) + (y-2)| \leq 2\,|x-1| + |y-2| < 3\delta = \epsilon$$

Örnek 6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} xy + 2x - y = 5$ *olduğunu* $\epsilon - \delta$ *tanımını kullanarak ispatlayın.*

Çözüm. $\epsilon > 0$ *olsun ve* $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ *seçelim. Bu durumda*

$$|x-2| < \delta, \quad |y-1| < \delta$$

ise

$$\begin{aligned}
|xy + 2x - y - 5| &= |(x-2+2)(y-1+1) + 2(x-2+2) - (y-1+1) - 5| \\
&= |(x-2)(y-1) + 3(x-2) + (y-1)| \\
&\leq |x-2|\,|y-1| + 3\,|x-2| + |y-1| \\
&\leq 1 \cdot |y-1| + 3\,|x-2| + |y-1| < 5\delta < \epsilon
\end{aligned}$$

Teorem 1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ *ve* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$ *ise*

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$*,*

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)g(x,y)) = LM$*,*

(3) $M \neq 0$ *ise* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$*,*

(4) (Bileşke fonksiyonun limiti) $F : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $t = L \in A$*'da sürekli ise*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(f(x,y)) = F(L)$$

olur.

(5) Eğer f *tek değişkenli bir fonksiyon ise*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x), \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(y) = \lim_{y\to y_0} f(y).$$

Kanıt. (1)-(3) ispatları tek değişkenli durumdaki ile hemen hemen aynı. Bunları siz ispatlayın.

Şimdi (4)'ü ispatlayalım.

$\epsilon > 0$ verilsin. $F(t)$ sürekli olduğundan, öyle bir $\delta' > 0$ vardır ki

$$\forall t \in A,\ 0 < |t - L| < \delta' \implies |F(t) - F(L)| < \epsilon \tag{3}$$

Ayrıca $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \implies |f(x,y) - L| < \delta' \tag{4}$$

olur. (3)'de $t = f(x,y)$ seçip (4)'i kullanırsak

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \implies |F(f(x,y)) - F(L)| < \epsilon.$$

İspat bitti.

(5)'i de siz ispatlayın. $\square$

Örnek 7. *Teorem 1'i kullanarak aşağıdaki limiti hesaplayabiliriz.*

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(\pi/3,2)} y\sin(x/y) &= \lim_{y\to 2} y \lim_{(x,y)\to(\pi/3,2)} \sin(x/y) = 2\sin(\lim_{(x,y)\to(\pi/3,2)} x/y) \\ &= 2\sin\left(\frac{\lim_{x\to\pi/3} x}{\lim_{y\to 2} y}\right) = 2\sin\pi/6 = 1\end{aligned}$$

Teorem 2 (Sıkıştırma Teoremi)**.** *Bir $r > 0$ ve $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \le r$ olan her (x,y) için*

1. $f(x,y) \le g(x,y) \le h(x,y)$ *ve*
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$

ise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$$

olur.

Örnek 8.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

limitini, varsa, hesaplayın.

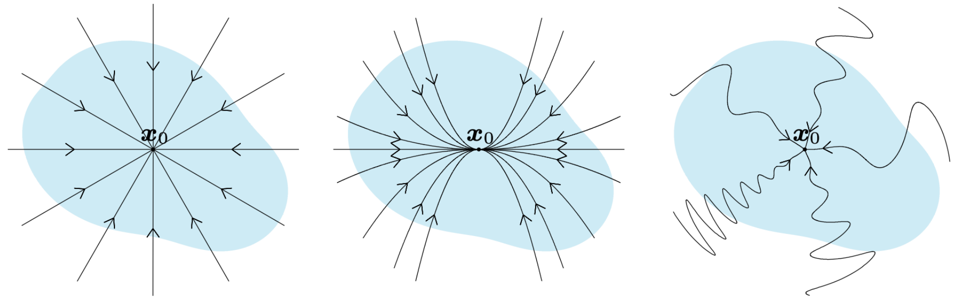
Çözüm.

$$0 < \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| |y| < |y|$$

Sıkıştırma Teoremini uygula.

Yönlü Limit

Tek değişkenli fonksiyonlardaki sağdan veya soldan limit kavramı, iki değişkenli fonksiyonlarda, bir noktaya farklı eğriler üzerinden yaklaşma kavramına dönüşür. Tek değişkenli fonksiyonlarda bir noktaya sadece iki yönden yaklaşılabilirken, iki değişkenli fonksiyonlarda bir noktaya sonsuz farklı yönden yaklaşılabilir.



Şekil 0.1: Çok değişkenli fonksiyonlarda bir noktaya sonsuz farklı yönden yaklaşılabilir.

1. Tek değişkenli fonksiyonlarda sağdan veya soldan limit yoksa limit de yoktur. İki değişkenli fonksiyonlarda ise (x_0, y_0) noktasını içeren herhangi bir C eğrisi için

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in C}} f(x,y) \text{ limiti yoksa } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ limiti de yoktur.}$$

Tersine, iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa, herhangi bir yönden yaklaşıldığında da limitinin olması gerekir.

Örnek 9. $f(x,y) = \begin{cases} y/x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *fonksiyonu için* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *limitini, varsa, bulalım.* $(0,0)$ *noktasına* $y = x$ *doğrusu boyunca yaklaşan yönlü limit*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \textit{ tanımsız}$$

olduğundan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2} = \textit{ tanımsız}$$

limiti tanımsızdır.

2. Tek değişkenli fonksiyonlarda bir noktada sağdan ve soldan limit birbirine eşit değilse, o noktada limit yoktur. İki değişkenli fonksiyonlarda, eğer (x_0, y_0) noktasını içeren iki farklı C_1 ve C_2 patikaları için

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y)$$

ise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ limiti yoktur.}$$

Örnek 10. *Aşağıdaki limiti varsa bulun.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Çözüm.
1. Metot. $(0,0)$ *noktasına* $y=0$ *doğrusu üzerinden yaklaşırsak*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$(0,0)$ *noktasına* $y=x$ *doğrusu üzerinden yaklaşırsak*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

İki farklı eğri üzerinden iki farklı limit değeri bulunduğundan limit yoktur.

2. Metot.

$$\lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2}$$

Sonuç k*'ya yani seçilen eğriye bağlı olduğundan, limit yoktur.*

3. Öte yandan tek değişkenli fonksiyonlarda, sağdan veya soldan limitin olması, fonksiyonun o noktada limiti olacağı anlamına gelmez. Benzer bir şekilde, iki değişkenli bir fonksiyon için (x_0, y_0) noktasında bir C eğrisi için limitin olması, o noktada fonksiyonun limitinin olacağı anlamına gelmez.

İki değişkenli fonksiyonlarda limit alınan noktaya sadece düz doğrular üzerinden yaklaşmak yeterli olmaz.

Örnek 11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *limitinin olmadığını gösterin.*

Çözüm. *Önce düz doğrular boyunca yaklaşalım.*

$$\lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2kx}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} x\frac{k}{x^2+k^2} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \frac{k}{x^2+k^2} = 0\cdot\frac{k}{k^2} = 0$$

Bu bulduğumuz sonuç limit varsa 0 olmalıdır diyor. Ama limit olmayabilir. Bu sefer paraboller boyunca $(0,0)$*'a yaklaşalım.*

$$\lim_{(x,y=kx^2)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2}$$

Yani limit yoktur.

Örnek 12. a*,* b *negatif olmayan birer tamsayı,* m*,* n *ise çift pozitif birer tamsayı,* c*,* d *ise pozitif reel sayılar olsun.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^ay^b}{cx^m+dy^n} = \begin{cases} 0 & \frac{a}{m}+\frac{b}{n} > 1 \\ \textit{yok} & \frac{a}{m}+\frac{b}{n} \le 1 \end{cases}$$

ispat. *İlk olarak $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\leq 1$ olduğunda limitin olmadığını görelim. k sabit bir sayı olmak üzere $(0,0)$ noktasına $y=kx^{m/n}$, üzerinden yaklaşalım. Bu durumda*

$$\lim_{x\to 0}\frac{k}{c+dk^n}x^{a+bm/n-m}$$

limiti $a+bm/n-m<0$ ise tanımsız, $a+bm/n-m=0$ ise k'ya bağlı olduğundan, $a+bm/n-m\leq 0$ için orijinal limitin var olmadığını buluruz. Bu da $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\leq 1$ olduğunda limitin olmadığını gösterir.

Şimdi $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}>1$ durumunda limitin 0 olduğunu görelim. Eğer $a/m>1$ yani $a-m>0$ ise

$$\left|\frac{x^ay^b}{cx^m+dy^n}\right|\leq\frac{1}{c}\left|\frac{cx^m}{cx^m+dy^n}\right|\left|x^{a-m}y^b\right|\leq\frac{1}{c}\left|x^{a-m}y^b\right|$$

olduğundan, sonuç sıkıştırma lemmasından $a-m>0$ ve $b>0$ olduğundan elde edilebilir. Benzer şekilde $b/n>1$ ise de sonuç elde edilir. Şimdi hem $0<a/m<1$ hem de $0<b/n<1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda biraz karmaşık bir eşitsizlik kullanmak gerekeceği için ispatı ders notlarına dahil etmiyorum. İspat için bkz [1]

Alıştırmalar

Aşağıdaki limitleri varsa bulun.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$. (ipucu: ifadeyi sadeleştirip limiti hesaplayın.)

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$. (ipucu: sıkıştırma teoremini kullananın.)

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ (ipucu: $x=0$ ve $x=y^2$ doğrultularından yaklaşın.)

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ (ipucu: $x=0$ ve $x=y$ doğrultularından yaklaşın.)

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ipucu: sıkıştırma teoremini kullanın.)

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ipucu: sıkıştırma Teoremini kullanın.)

8. Bir önceki örnekte limitin tanımını kullanarak limitin sıfır olduğunu gösterin.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{xy^2-1}{y-1}$ (ipucu: $x=1$ ve $x=y$ doğruları üzerinden yaklaşın)

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}$

[1] http:/sertoz.bilkent.edu.tr/depo/limit-tr.pdf

12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

16. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$

17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$

18. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

19. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4}$

20. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^3+y^3}$

21. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

22. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

23. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$

24. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

25. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$

26. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ (ipucu: ifadeye pozitif reel sayılar üzerinde birim fonksiyon olan $\exp\circ\ln$ fonksiyonunu uygulayın, ardından $\ln(1+x) < x$, $x > 0$ eşitsizliğini kullanarak sıkıştırma teoremini uygulayın)

27. Limit tanımını kullanarak $\lim_{(x,y)\to(1,1)} y^2 - 3xy = -2$ olduğunu gösterin.

Opsiyonel Bölüm

Sonsuz Limitler

$f : a \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $M > 0$ için bir $\delta > 0$ bulabiliyorsak öyle ki

$$(x,y) \in A \text{ ve } 0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \implies f(x,y) > M$$

ise $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ yazılır.

Örnek 13. *Limitin tanımını kullanarak* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$ *olduğunu gösterelim.*
$M > 0$ *verilsin.* $\delta = 1/\sqrt{2M}$ *olarak seçelim. O halde* $|x| < \delta$ *ve* $|y| < \delta$ *iken*

$$x^2+y^2 = |x|^2+|y|^2 < \frac{1}{2M}+\frac{1}{2M} = \frac{1}{M} \implies \frac{1}{x^2+y^2} > M$$

olur.

Yinelemeli Limitler

Örnek 14.

$$0 = \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+y^2} \neq \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2}{x^2+y^2} = 1$$

Yani genel olarak yinelemeli limitler eşit olmaz.

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \neq \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

İki değişkenli bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olması, o noktada yinelemeli limitlerinin de var olması anlamına gelmez.

Örnek 15.

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ *ama* $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ *var olmadığını gösterin.*

Ama gösterilebilir ki (bkz [Wad00] syf. 243) eğer $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ise ve yinelemeli limitler tanımlıysa, yinelemeli limitler eşit olur

$$L = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

olur.

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ limitinin tanımlı olması $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ yinelemeli limitinin tanımlı olmasını gerektirmez.

Kutupsal koordinatlar ve limit

Lemma 1. *Eğer*

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - L| \leq g(r), \qquad \lim_{r\to 0+} g(r) = 0$$

ise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

olur.

Örnek 16. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ *limitini hesaplayalım.*

Çözüm. $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r^2(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \leq 2r^2$ *ve* $\lim_{r\to 0+} 2r^2 = 0$ *olduğundan*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$$

olur.

Örnek 17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2) = 0$ *olduğunu görelim.*

Çözüm. $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r^2\cos\theta\sin\theta\ln(r^2)| \leq |2r^2\ln r|$. $\lim_{r\to 0+} 2r^2\ln r = 0$ *olduğu L'hospital kuralıyla gösterilebilir.*

Uyarı 2. *Dikkat,* $\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ *demek, limiti hesaplarken,* θ*'yı sabit tutup* r*'yi sıfıra göndermek demek. Bu da aslında limit alırken* $(0,0)$*'a düz doğrular üzerinden yaklaşmak anlamına geliyor. Dolayısıyla* $\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ *limitinin var olması,* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *limitinin var olması anlamına gelmez. Aşağıda bunun bir örneği verilmiştir.*

Örnek 18. $(x,y)\neq(0,0)$ *için* $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *olarak tanımlansın.* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$*limitinin olmadığını* $(0,0)$*'a* $y=kx^2$ *yönünden yaklaşarak gösterin. Öte yandan* $\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$ *olur. Bunu görelim.*

$$\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2 r\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0} r\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=0$$

Son limitin gerçekten herhangi bir θ *için sıfır olduğunu görelim. Eğer* $\sin\theta=0$ *ise ifade sıfır ve dolayısıyla limit sıfırdır. Eğer* $\sin\theta\neq 0$ *ise*

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0} r\lim_{r\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=0\cdot\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\sin^2\theta}=0$$

Süreklilik

Tanım 4. $f: R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *ve* $(x_0,y_0)\in R$ *olsun. Eğer*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

ise f *fonksiyonu* (x_0,y_0) *noktasında* ***süreklidir*** *denir. Eğer* f *her* $(x,y)\in R$ *noktasında sürekli ise* f*'ye* ***sürekli fonksiyon*** *denir.*

Eğer f ve g bir (x_0,y_0) noktasında sürekliyse, $f+g$, $f-g$, fg, f/g ($g(x_0,y_0)\neq 0$ ise) fonksiyonları da süreklidir. Bu kolayca limitin benzer özelliklerinden görülebilir. Ayrıca iki sürekli fonksiyonun bileşkesi de (eğer tanımlıysa) süreklidir.

Ayrıca $p_x(x,y)=x$ ve $p_y(x,y)=y$ fonksiyonları da süreklidir. (Tanımı kullanarak gösterin.)

Örnek 19. $f(x,y)=x\sin y$ *fonksiyonunu* $f=p_x\cdot\sin\circ p_y$ *olarak yazalım.* $\sin\circ p_y$ *sürekli iki fonksiyonun bileşkesi olduğundan sürekli,* f *sürekli* p_x *ve* $\sin\circ p_y$ *fonksiyonlarının çarpımı olduğu için süreklidir.*

Örnek 20.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonu $(0,0)$ *hariç her noktada süreklidir. Zira* $f=2\frac{p_xp_y}{p_x^2+p_y^2}$ *yani* f *sürekli fonksiyonların toplamı, çarpımı ve bölümü olduğundan paydanın sıfır olmadığı her yerde süreklidir.* $(0,0)$ *noktasında süreksizdir zira o noktada limiti yoktur (gösterin).*

Örnek 21.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonu her yerde süreklidir.

Alıştırmalar

1. Verilen fonksiyonların $(0,0)$ noktasında sürekliliklerini inceleyin.

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

g) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

h) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

i) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}e^{-x^2-y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

j) $f(x,y)=\begin{cases}xy\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

k) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & x^2+y^2>0\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

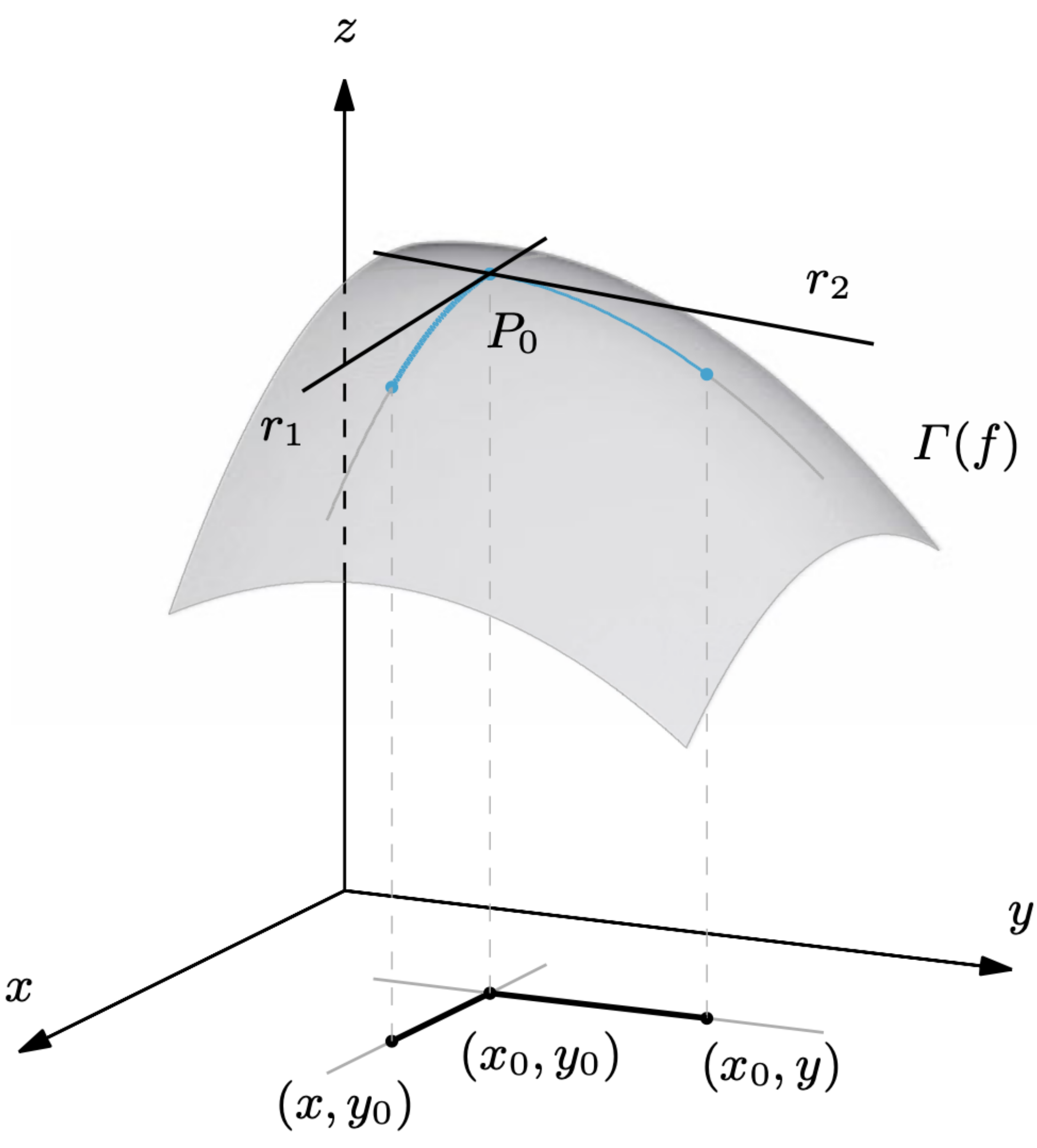
l) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Kısmi Türevler

$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonunun bir $(x_0, y_0) \in R$ noktasındaki birinci mertebeden kısmi türevleri aşağıdaki gibi olur.

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \mid_{(x_0,y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} \mid_{(x_0,y_0)} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$



Şekil 0.2: (x_0, y_0) noktasındaki kısmi türevler r_1, r_2 teğet doğrularının eğimini verir.

Örnek 22. *$f(x, y) = 2x^2y$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktasındaki birinci mertebe kısmi türevlerini hesaplayınız.*

1. y'yi sabitleyip, $g(x) = f(x, y)$ olarak yazarsak

$$g'(x) = f_x(x, y)$$

buluruz. Bu kurala göre örneğin x değişkenine göre kısmi türev hesaplamak için, y değişkenini sabitleyip, x değişkenine göre türev alınır.

Örnek 23. *$f(x, y) = e^{x^2+y^2} \sin y$ olsun.*

$$f_x(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \sin y, \qquad f_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2} \sin y + e^{x^2+y^2} \cos y,$$

buluruz.

2. İkiden çok değişkenli bir fonksiyonunun kısmi türevleri de benzer bir şekilde tanımlanabilir.

Bir fonksiyonun bir noktada kısmi türevlerinin olması, o noktada sürekli olmasını gerektirmez.

Örnek 24.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$*'da süreksiz ama* $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ *olduğunu yani kısmi türevlerinin tanımlı olduğunu görelim.*

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Benzer şekilde $f_y(0,0) = 0$ *olduğu görülür*

f'in ikinci mertebe kısmi türevleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0,y_0) &= \frac{\partial f_x}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x_0+h,y_0) - f_x(x_0,y_0)}{h} \\ f_{xy}(x_0,y_0) &= \frac{\partial f_x}{\partial y} = \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Karışık İkinci Mertebe Kısmi Türevlerin Eşitliği

Örnek 25. $f(x,y) = e^{x^2+y}$ *fonksiyonu için* $f_{xy} = f_{yx}$ *olduğunu gösterin. Bu bir tesadüf mü?*

Aşağıdaki örnek ikinci mertebe karışık kısmi türevlerin yani f_{xy} ve f_{yx}'in her f için eşit olmayabileceğini gösterir. Yani kısmi türevlerin sırasını değiştirince eşit olmayabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

Örnek 26.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ise $f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$ *olduğunu gösterin.*

Çözüm.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = -1$$

Diğer türev benzer şekilde bulunur.

Çözüm. $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$, *ve* $(x,y) \neq (0,0)$ *ise*

$$f_x(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

Yani

$$f_x(0,0) = 0, \qquad f_x(0,y) = -y$$

olur.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

Benzer şekilde

$$f_y(0,0) = 0, \qquad f_y(x,0) = x$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

Yukarıdaki örnekte sorun aslında şu. Aşağıdaki ifadeler birbirine eşit olduğu terimlerin yerleri değiştirilerek rahatlıkla görülür.

$$\frac{1}{k}\left(\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} - \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right)$$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k} - \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}\right)$$

Yukarıda, önce $h \to 0$, sonra $k \to 0$ alınırsa, $f_{xy}(0,0)$ elde edilir. Limitlerin sırası değiştirilirse $f_{yx}(0,0)$ elde edilir. Yani yinelemeli limitlerin eşit olmaması durumuyla karşılaşırız.

Teorem 3. *Eğer (x_0, y_0) merkezli herhangi bir açık disk üzerindeki her noktada f_{xy} ve f_{yx} var ve sürekli ise $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$ olur.*

Kanıt. İspat için bkz. syf. 17 □

Alıştırmalar

1. $f(x,y) = 2x^2y + 5xy$ fonksiyonun $(2,1)$ noktasındaki kısmi türevlerini türevin limit tanımını kullanarak bulun.

2. $f(x,y) = \sin(x/y)e^{y/x}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, fonksiyonu için f_x ve f_y kısmi türevlerini bulun.

3. Aşağıdaki fonksiyonların, $f(0,0) = 0$ olarak tanımlı olmak üzere, $(0,0)$ noktasındaki kısmi türevlerini bulun.

   a) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$,

   b) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$,

   c) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$,

   d) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4+y^2}$,

e) $f(x,y) = \dfrac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|}$, f) $f(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^2+y^2}$

4. Verilen fonksiyonunun, verilen denklemi sağladığını gösterin.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\quad \dfrac{f_x}{y} + \dfrac{f_y}{x} = 0.$

b) $f(x,y) = e^{y/x} + \tan(x/y)$, $\quad x f_x + y f_y = 0.$

c) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad f_{xx} + f_{yy} = 0.$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad x f_x + y f_y + z f_z = f.$

e) $u = \ln\left(x^3+y^3+z^3-3xz\right)$, $\quad u_x + u_y + u_z = \frac{3}{x+y+z}.$

Zorunlu Olmayan Bilgiler

Şimdi Teorem 3 için bir ispat verelim.

Kanıt.

$$F(h,k) = \frac{1}{hk}\left[(f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0)) - (f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0))\right]$$

olarak tanımlayalım. Şimdi $\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} F(h,k) = f_{yx}(x_0,y_0)$ ve $\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} F(h,k) = f_{xy}(x_0,y_0)$ olduğu kısmi türevin tanımından görülebilir. Daha önce yinelemeli limitlerin eşit olması için, $\lim_{(h,k)\to(0,0)} F(h,k)$ limitinin var olmasının yeterli olduğunu söylemiştik. Tek değişkenli g fonksiyonunu

$$g(x) = f(x,y_0+k) - f(x,y_0)$$

olarak tanımlayalım.

$$F(h,k) = \frac{1}{hk}\left(g(x_0+h) - g(x_0)\right)$$

ve

$$g'(c) = f_x(c,y_0+k) - f_x(c,y_0)$$

olduğuna dikkat edelim.

g fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremini (ODT) uygularsak (ki kabullerimiz nedeniyle kullanımı geçerlidir) , x_0 ve x_0+h arasında öyle bir $c(h)$ vardır ki

$$g(x_0+h) - g(x_0) = g'(c(h))h$$

olur. Bu da

$$F(h,k) = \frac{1}{hk}\left(f_x(c(h),y_0+k) - f_x(c(h),y_0)\right)h$$

ile aynı anlama gelir. Şimdi

$$r(y) = f_x(c(h),y)$$

olarak tanımlayalım.

$$F(h,k) = \frac{1}{hk}\left(r(y_0+k) - r(y_0)\right)$$

ve

$$r'(d) = f_{xy}(c(h), d)$$

olur.

ODT'yi bu sefer r fonksiyonuna uygularsak, y_0 ve $y_0 + k$ arasında öyle bir $d(k)$ vardır ki

$$r(y_0 + k) - r(y_0) = r'(d(k))k$$

olur. Bu da

$$F(h,k) = \frac{1}{hk}\left(f_{xy}(c(h), d(k))\right) hk = f_{xy}(c(h), d(k))$$

anlamına gelir. f_{xy} kısmi türevi (x_0, y_0)'ın bir komşuluğunda sürekli olduğundan ve $\lim_{h\to 0} c(h) = x_0$, $\lim_{k\to 0} d(k) = y_0$ olduğundan,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} F(h,k) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

olur. Yani yinelemeli limitler eşit olmalı ve ispat bitti.

(Eğer yinelemeli limitlerin eşit olduğunu kullanmak istemezseniz, ODT'yi uygulamala sırasını değiştirin ve bu sefer

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} F(h,k) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

elde edin.) □

Uyarı 3.
- *Yukarıdaki teoremde karışık kısmi türevlerin sürekliliği yeterli ama gerekli olmayan bir koşuldur. Örneğin*

$$f(x,y) = \begin{cases} yx^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlı f fonksiyonu için f_{xy} ve f_{yx} fonksiyonları $(0,0)$'da süreksizdir ama $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$ olur. Gösterin. (ipucu: $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $g(0) = 0$ olarak tanımlı g fonksiyonu için $g'(0)$ tanımlıdır ama g', $x = 0$'da süreksizdir.)

- *Karışık kısmi türevlerin eşitliği ile ilgili çeşitli koşullar için bkz. (`http://www.sci.brooklyn.cuny.edu/~mate/misc/mixedpartial.pdf`).*

- *Yukarıdaki teorem, f_{yxx}, f_{xyx}, f_{xxy} gibi daha üst mertebeden karışık türevlerin eşitliğini göstermek için de kullanılabilir.*

- *Yukarıdaki teorem ikiden çok değişkenli fonksiyonlar içinde geçerlidir. Eğer $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ise f_{ij} ve f_{ji} türevlerinin eşitliğini yukarıdaki teorem sağlar.*

Türetilebilme

Daha önceki bölümde çok değişkenli bir fonksiyonun kısmi türevlere sahip olmasının tek başına fonksiyonun sürekli olmasına yeterli olmadığını görmüştük. Bu bölümde çok değişkenli fonksiyonlar için kısmi türevden daha güçlü bir kavram olan türetilebilme kavramını inceleyeceğiz. Öncelikle, tek değişkenli fonksiyonlardaki türev tanımını hatırlayalım.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \implies \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h} = 0$$
$$\implies \lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)|}{|h|} = 0$$

Bu tanımı iki değişkenli fonksiyonlara aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

Tanım 5. *$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, eğer $f_x(x_0, y_0)$ ve $f_y(x_0, y_0)$ kısmi türevlerine sahipse ve*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

şartını sağlıyorsa, f fonksiyonuna (x_0, y_0) noktasında türetilebilir denilir.

Bu şart şu şekilde de yazılabilir

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x-x_0) - f_y(x_0, y_0)(y-y_0)|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

f fonksiyonun (x_0, y_0) noktasında türetilebilir olmasının geometrik anlamı f fonksiyonunun grafiğinin $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ noktasında teğet düzleminin tanımlı olması anlamına gelir. Bu konuyu ileride ele alacağız.

Bir fonksiyonun bir noktada kısmi türevlerinin olması o noktada türetilebilir olduğu anlamına gelmez.

Örnek 27.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{|y|}\sqrt{x^2+y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında türetilebilirliğini inceleyiniz.

Çözüm. *Önce f'in kısmi türevlerini hesaplayalım.*

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
$$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{k}{|k|}\sqrt{(k)^2}}{k} = 1$$

Türetilebilme koşulu aşağıdaki limitin sıfır olmasını gerektirir.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{k}{|k|}\sqrt{h^2+k^2}-k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{k}{|k|}-\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|$$

Yukarıdaki limitin olmadığını görmek için $h=0$ *yönünden limitinin*

$$\lim_{k\to 0}\left|\frac{k}{|k|}-\frac{k}{\sqrt{k^2}}\right| = 0,$$

$k=h$ *yönünden limitinin ise*

$$\lim_{k\to 0}\left|\frac{k}{|k|}-\frac{k}{\sqrt{2k^2}}\right| = \lim_{k\to 0}\left|\frac{k}{|k|}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = 1-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

olduğunu görmek yeterlidir. Yani limit yaklaşılan yöne bağlıdır ve yoktur. Yani f *fonksiyonu türetilebilir değildir.*

f'nin bir noktada kısmi türevlerinin olmasının o noktada sürekli olacağı anlamına gelmediğini görmüştük. Aşağıdaki teorem, türetilebilmenin kısmi türevlere sahip olmaktan daha güçlü bir koşul olduğunu gösteriyor.

Teorem 4. $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu bir* (x_0,y_0) *noktasında türetilebilir ise süreklidir.*

Kanıt.

$$|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)| \le |f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k|$$
$$+\,|f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k|$$

Sağdaki iki terim de $(h,k)\to(0,0)$ limitinde sıfır olur. □

Örnek 28. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ *ve* $f(0,0)=0$ *fonksiyonu* $(0,0)$ *noktasında türetilemez zira bu noktada sürekli değildir. Gösterin.*

Türetilebilmenin çok daha kolay kontrol edilebilen bir koşulu şudur.

Teorem 5. $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu için* f_x *ve* f_y *kısmi türevleri* (x_0,y_0) *noktasının bir açık komşuluğunda tanımlı ve* f_x*,* f_y *fonksiyonları* (x_0,y_0) *noktasında sürekli ise,* f*,* (x_0,y_0) *noktasında türetilebilir.*

Bu teoremin, daha az genel ama daha akılda kalıcı bir versiyonu şöyledir:
`Eğer` f `fonksiyonu` (x_0,y_0) `noktasının bir açık komşuluğunda sürekli kısmi türevlere sahipse o noktada türetilebilir.`

Kanıt. İspat için bkz. syf. 23 □

Örnek 29. *Yukarıdaki teoreme göre* $f(x,y)=x^2+y^2$ *fonksiyonu her* (x,y) *noktasında türetilebilirdir. Zira* $f_x=2x$ *ve* $f_y=2y$ *fonksiyonları* $\mathbb{R}^2$ *üzerinde süreklidir.*

Yukarıdaki önermenin tersi doğru değildir. Yani iki değişkenli bir fonksiyonun bir noktada türetilebilir olması o noktada sürekli kısmi türevleri olacağı anlamına gelmez.

Örnek 30 (Türetilebilen ama kısmi türevleri sürekli olmayan bir fonksiyon).

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında türetilebilir olduğunu ama kısmi türevlerinin $(0,0)$ noktasında sürekli olmadığını gösterin.

Çözüm. *Öncelikle $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ olduğunu gösterin.*

Şimdi f'in $(0,0)$'da türetilebilir olduğunu görelim.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Son olarak

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

buluruz. $\lim_{x\to 0} f_x(x,0)$ *limitinin tanımsız olduğunu görelim. Zira*

$$\lim_{x\to 0+} f_x(x,y) = \lim_{x\to 0+} -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}$$

Burada ikinci ifadenin limiti sıfır, birinci ifadenin limiti ise tanımsız olduğundan, limit tanımsızdır. Yani f_x $(0,0)$ da süreksiz olur.

Örnek 31. $f(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2}$ *fonksiyonun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu ancak bu noktada türetilemez olduğunu gösterin.*

Çözüm. *Tanım gereği f'in bir noktada türetilebilir olması için o noktada kısmi türevlerinin tanımlı olması gerekir. Soruda verilen fonksiyonun $(0,0)$ da kısmi türevlerinin olmadığını gösterin.*

Örnek 32. $f(x,y) = x\sqrt{y}$ *fonksiyonunun $(2,1)$ noktasında türetilebilir olduğunu, türetilebilirliğin limit tanımını kullanarak gösterin.*

Çözüm. $f_x(2,1) = 1$ *ve* $f_y(2,1) = 1$ *olur. Türetilebilirliğin tanımını kullanalım.*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|(2+h)\sqrt{1+k} - 2\sqrt{1} - 1h - 1k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\left((2+h)\sqrt{1+k}\right)^2 - (2+h+k)^2\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\left((2+h)\sqrt{1+k} + (2+h+k)\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{4+4h+h^2+4k+4hk+h^2k-4-h^2-k^2-4h-4k-2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2hk+h^2k-k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Son limit için

$$\left|\frac{2hk+h^2k-k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|2h+h^2-k\right|\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \left|2h+h^2-k\right|$$

Bu ifadenin $(h,k)\to(0,0)$ *limiti sıfır olduğundan, sıkıştırma teoreminden orijinal limitin sıfır olduğu çıkar. Yani fonksiyon* $(0,0)$ *noktasında türetilebilir.*

Burada her $k\in\mathbb{R}$ *için*

$$|k| \leq \sqrt{h^2+k^2}$$

olduğu bilgisini kullandık.

Alıştırmalar

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ ise ve $f(0,0)=0$ olarak tanımlansın. f'in $(0,0)$ hariç her $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için türetilebilir olduğunu gösterin. f'in $(0,0)$'da türetilemeyeceğini gösterin.

2. $f(x,y) = x^2+3xy^2$ fonksiyonunun her (x_0,y_0) noktasında türetilebilir olduğunu, türetilebilirliğin limit tanımını kullanarak gösterin.

3. $f(x,y)=|xy|$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında türetilebilir olduğunu gösterin. f_x kısmi türevinin y-ekseni üzerindeki orijinden farklı noktalarda tanımsız olduğunu, diğer her yerde tanımlı ve sürekli olduğunu gösterin.

4. Aşağıdaki fonksiyonların, $f(0,0)=0$ olarak tanımlı olmak üzere, $(0,0)$ noktasında türetilebilir olup olmadıklarını inceleyin.

   a) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$,
   b) $f(x,y) = \dfrac{x^3y-y^3x}{x^2+y^2}$,
   c) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$,
   d) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4+y^2}$,
   e) $f(x,y) = \dfrac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|}$,
   f) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$,
   g) $f(x,y) = (xy)^{1/3}$,
   h) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$,
   i) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$
   j) $f(x,y) = \dfrac{x^5}{x^4+y^2}$
   k) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   l) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   m) $f(x,y) = |y|\ln(1+x)$
   n) $f(x,y) = xy\ln\left(x^2+y^2\right)$
   o) $f(x,y) = |x|+|y|$
   p) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Zorunlu Olmayan Bilgiler

Şimdi Teorem 5 için bir ispat verelim.

Kanıt. f_x ve f_y fonksiyonları (x_0, y_0)'in bir açık komşuluğunda tanımlı olduğundan, yeterince küçük h ve k değerleri için Ortalama Değer Teoremini aşağıdaki gibi kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) &= \big[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)\big] + \big[f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)\big] \\ &= f_y(x_0+h, \tilde{y}(k))k + f_x(\tilde{x}(h), y_0)h \end{aligned}$$

Burada $\lim_{h\to 0} \tilde{x}(h) = x_0$, $\lim_{k\to 0} \tilde{y}(k) = y_0$ şeklindedir.

f fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında türetilebilme şartını yazalım.

$$\begin{aligned} &\frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{|f_y(x_0+h, \tilde{y}(k))k + f_x(\tilde{x}(h), y_0)h - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &\le |f_x(\tilde{x}(h), y_0) - f_x(x_0, y_0)| \left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| + |f_y(x_0+h, \tilde{y}(k)) - f_y(x_0, y_0)| \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \end{aligned}$$

f_x ve f_y, (x_0, y_0) noktasında sürekli olduklarından,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} |f_x(\tilde{x}(h), y_0) - f_x(x_0, y_0)| = 0, \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} |f_y(x_0+h, \tilde{y}(k)) - f_y(x_0, y_0)| = 0$$

olur. Ayrıca

$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le 1,$$

olduğundan sağdaki birinci ifadenin $(h, k) \to (0, 0)$ limiti sıfır olur. Benzer şekilde sağdaki ikinci ifadenin limiti de sıfırdır. □

Zincir Kuralı

Örnek 33. *$z = f(x, y) = x^2y$, $x = \cos t$ ve $y = \sin t$ ise $\frac{dz}{dt}$'yi hesaplayın. Bu türev f fonksiyonun birim çember üzerinde ilerlerken nasıl değiştiğini verir.*

Çözüm. *Birinci yol olarak $z = \cos^2 t \sin t$ yazıp belirtilen türev hesaplanır. İkinci yol olarak zincir kuralını kullanırsak*

$$\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}y + x^2\frac{dy}{dt} = 2\cos t(-\sin t)\sin t + \cos^2 t \cos t$$

bulunur.

Teorem 6. *f fonksiyonu (x_0, y_0) da türetilebilir olsun. $x = u(t)$ ve $y = v(t)$ fonksiyonları da $t = t_0$ da türetilebilir ve $x_0 = u(t_0)$ ve $y_0 = v(t_0)$ olsun.*

$$z(t) = f(u(t), v(t))$$

yazarsak

$$z'(t_0) = f_x(x_0, y_0)u'(t_0) + f_y(x_0, y_0)v'(t_0)$$

olur. Bunu

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

veya daha açık olarak

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dt}(t_0)$$

olarak da yazabiliriz.

Teoremin ispatı için bkz. syf. 25 Benzer şartlar altında eğer

$$z = f(x, y), \quad x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

ise

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Alıştırmalar

1. $z = \ln(x^2+y^2)$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ olsun. $\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ kısmi türevlerini hesaplayın. (cevap: $\frac{\partial z}{\partial u} = 2$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$.)

2. $u = f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ ise $\frac{du}{dt}$ nedir?

3. $z = f(x, y)$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevleri bir fonksiyon ise
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$
denkleminin, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümleriyle
$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$
olarak yazılabileceğini gösterin.

4. $z = f(x, y)$
$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$
Laplace denkleminin, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümleriyle
$$z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} = 0$$
olarak yazılabileceğini gösterin.

5. Eğer g fonksiyonu Laplace denklemini sağlarsa $f(x, y) = g\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$, olarak tanımlanan f fonksiyonunun da Laplace denkleminin bir çözümü olduğunu gösterin.

6. $z = f(x, y)$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevleri olan bir fonksiyon ise
$$z_{xx} - m^2 z_{yy} = 0$$
denkleminin $u = y+mx$ ve $v = y-mx$ dönüşümleriyle $z_{uv} = 0$ olarak yazılabileceğini gösterin.

7. $t = f(u, v, w)$, $u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$ ise
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$
olduğunu gösterin.

8. $w = f(u,v)$ fonksiyonu $w_{uu} + w_{vv} = 0$ Laplace denklemini sağlasın ve $u = (x^2 - y^2)/2$ ve $v = xy$ olarak tanımlansın. O halde $w_{xx} + w_{yy} = 0$ olduğunu gösterin.

9. $x^2 f_{xx} + y^2 fyy + x f_x + y f_y = 0$, $x = e^r$ ve $y = e^t$ ise $f_{rr} + f_{tt} = 0$ olduğunu gösterin.

10. Aşağıdaki fonksiyonların verilen denklemleri sağladığını gösterin.

    a) $z = f(x + g(y))$, $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$

    b) $z = xf(x+y) + yg(x+y)$, $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$

    c) $z = f(xy) + \sqrt{xy} + g\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 z_{xx} = y^2 z_{yy}$

11. 2. $f(y_1, y_2) = \cos(y_1^2 + y_2^2)$, $y_1(x,y,z) = \sin^2(xyz)$, $y_2(x,y,z) = 2xy^2 + yz^3 - xz^2$ ise $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ kısmi türevlerini hesaplayın.

12. $z = x^c e^{-y/x}$ fonksiyonunun $yz_{yy} = z_x - z_y$ denklemini sağlaması için c ne olmalıdır? (Cevap: $c = 1$)

13. $x^2 y'' + xy' + y = 0$ denklemini $x = e^t$ eşitliği ile verilen denklemin t değişkenine göre $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ olarak yazıldığını gösterin.

14. $u = f(x,y), x = e^s \cos t, \quad y = e^s \sin t$ ise $u_{xx} + u_{yy} = e^{-2s}(u_{ss} + u_{tt})$ olduğunu gösterin.

Zorunlu Olmayan Bilgiler

Şimdi Teorem 6 için bir ispat verelim.

Kanıt.

$$H(l) = u(t_0 + l) - u(t_0) = u(t_0 + l) - x_0, \qquad K(l) = v(t_0 + l) - v(t_0) = v(t_0 + l) - y_0,$$

yazarsak

$$\lim_{l\to 0} H(l) = \lim_{l\to 0} K(l) = 0, \qquad \lim_{l\to 0} \frac{H(l)}{l} = u'(t_0), \qquad \lim_{l\to 0} \frac{K(l)}{l} = v'(t_0),$$

olur.

$$\epsilon(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k$$

olarak tanımlarsak,

$$\begin{aligned}\frac{z(t_0 + l) - z(t_0)}{l} &= \frac{f(u(t_0 + l), v(t_0 + l)) - f(x_0, y_0)}{l} \\ &= \frac{f(x_0 + H(l), y_0 + K(l)) - f(x_0, y_0)}{l} \\ &= f_x(x_0, y_0)\frac{H(l)}{l} + f_y(x_0, y_0)\frac{K(l)}{l} + \epsilon(H(l), K(l))\frac{1}{l}\end{aligned}.$$

Eğer $\lim_{l\to 0} \frac{\epsilon(H(l),K(l))}{l} = 0$ olduğunu gösterebilirsek, ispat her iki tarafın limitini alarak bitmiş olur.

$$\lim_{l\to 0} \frac{\epsilon(H(l), K(l))}{l} = \lim_{l\to 0} \frac{\epsilon(H(l), K(l))}{\sqrt{H(l)^2 + K(l)^2}} \lim_{l\to 0} \sqrt{\left(\frac{H(l)}{l}\right)^2 + \left(\frac{K(l)}{l}\right)^2}.$$

yazalım. Türetilebilirliğin tanımından

$$\lim_{(H,K)\to(0,0)} \frac{\epsilon(H,K)}{\sqrt{H^2+K^2}} = 0$$

olur. Bu da

$$\lim_{l\to 0} \frac{\epsilon(H(l),K(l))}{\sqrt{H(l)^2+K(l)^2}} = 0$$

anlamına gelir. Zira bu limit bir yönlü limittir, ve limit varsa yönlü limitlerin de var olması gerekir.

İkinci limit ise vardır ve

$$\lim_{l\to 0} \sqrt{\left(\frac{H(l)}{l}\right)^2 + \left(\frac{K(l)}{l}\right)^2} = \sqrt{u'(t_0)^2 + v'(t_0)^2}$$

değerine eşittir. Bu sonuçlar birleştirilerek

$$\lim_{l\to 0} \frac{\epsilon(H(l),K(l))}{l} = 0$$

sonucu bulunur. □

Kapalı ve Ters Fonksiyon Teoremleri

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, aşağıda vereceğimiz kapalı fonksiyon teoremi,

$$F(x,y) = 0$$

iki bilinmeyenli bir denklemin hangi şartlar altında

$$y = f(x)$$

şeklinde bir çözümü olduğunu söyler.

F fonksiyonu (x,y) civarında sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Yani F türetilebilirdir.

$$F(x,y) = 0 \tag{5}$$

denklemini alalım. (x_0,y_0) denklemin bir çözümü olsun, yani $F(x_0,y_0) = 0$ olsun.

Bu denklemi, (x_0,y_0) noktası civarında , y için x cinsinden çözmek istiyoruz. Yani öyle bir $\delta > 0$ ve $y = f(x), \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ fonksiyonu bulmak istiyoruz ki

$$y_0 = f(x_0), \qquad F(x,f(x)) = 0, \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

şartları sağlansın.

Türetilebilme koşulu (x_0,y_0) yakınında

$$F(x,y) \approx F(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

olduğunu söyler. (5) denklemi yerine, onun doğrusallaştırılmış hali olan

$$F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \tag{6}$$

denklemini göz önüne alalım. Aşağıdaki kapalı fonksiyon teoremi lineer (6) denkleminden y yi x in bir fonksiyonu olarak belirleyebilirsek (yani $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ise) (5) denkleminde de x_0'in bir açık komşuluğundaki her x için y'yi x cinsinden tek şekilde belirleyebileceğimizi söyler.

Kapalı Fonksiyon Teoremi. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durumu.

Öncelikle iki bilinmeyenli bir denklem ile ilgili kapalı fonksiyon teoremini inceleyelim.

Teorem 7 (Kapalı Fonksiyon Teoremi 1)**.** *(x_0, y_0)'ın bir $R \subset \mathbb{R}^2$ komşuluğunda tanımlı $F : R \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Eğer*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \textit{ve} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

ise

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad f(x_0) = y_0$$

şartlarını sağlayan ve x_0'ın bir komşuluğunda tanımlı tek bir $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Ayrıca f fonksiyonu tanımlandığı aralıkta sürekli türeve sahip bir fonksiyondur ve türevi

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

olarak belirlenir.

Kanıt. Aşağıda anlatılan teoremin görsel ispatı için bkz Figür 0.3.

1. $F_y(x_0, y_0) > 0$ kabul edelim. F_y fonksiyonu sürekli ve $F_y(x_0, y_0) > 0$ olduğundan

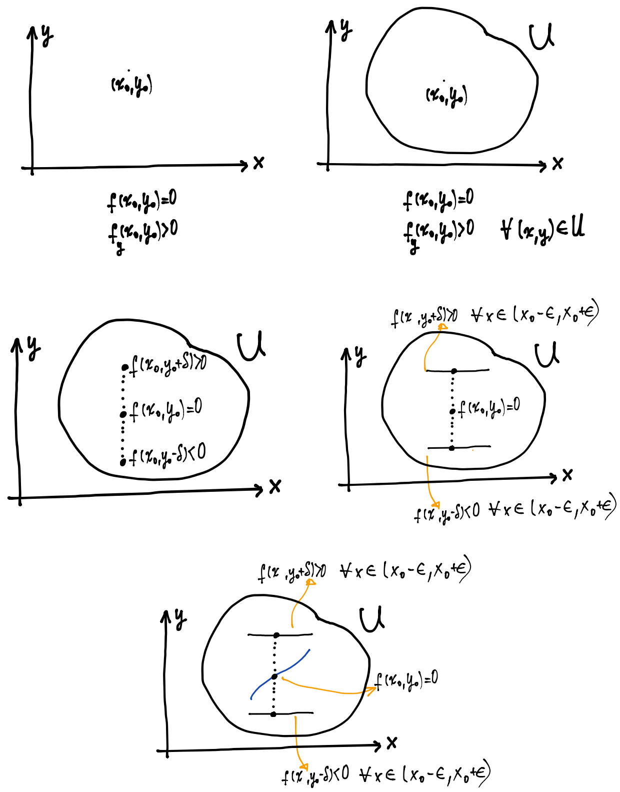
$$F_y(x, y) > 0, \qquad \forall (x, y) \in U$$

olacak şekilde (x_0, y_0)'ın bir U açık komşuluğu vardır.

2. Yeterince küçük bir $b > 0$ için $(x_0, y_0 + b)$ ve $(x_0, y_0 - b)$ noktaları U'nun içinde kalacaktır.

3. Ayrıca U içerisinde $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ olduğundan $F(x, y)$, sabit bir x için y'nin artan bir fonksiyonudur. Dolayısıyla $F(x_0, y_0 + b) > F(x_0, y_0) > F(x_0, y_0 - b)$ olur. Yani $F(x_0, y_0 + b) > 0$ ve $F(x_0, y_0 - b) < 0$ olur.

4. Yine süreklilik nedeniyle bir $\delta > 0$ ve her $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ için $F(x, y_0 + b) > 0$ ve $F(x, y_0 - b) < 0$ olur. Ara değer teoremi bize her $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ için $F(x, y(x)) = 0$ şartını sağlayan bir $y(x)$ olduğunu söyler.



Şekil 0.3: Kapalı fonksiyon teoreminin ispatı

5. Ayrıca $F(x,y)$, y'ye göre artan olduğundan bu şartı sağlayan tek bir $y(x)$ vardır ki. Dolayısıyla x_0'ın bir δ komşuluğunda teoremdeki birinci şartı sağlayan bir $y = f(x) = y(x)$ fonksiyonu bulmuş ve bu fonksiyonun tek olduğunu göstermiş olduk.

6. f fonksiyonun sürekli ve türetilebilir olduğunun ispatı için bkz. [BST08] syf 750.

$\square$

Kapalı Fonksiyon Teoremi bir varlık teoremidir. Teorem bir f fonksiyonunun varlığını garanti eder. Ama bu fonksiyonun ne olduğunu veya nasıl bulunacağını belirtmez.

Uyarı 4. *KFT'de $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ koşulu $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ koşulu ile değiştirilirse, bu sefer de y_0 noktasının bir $I = (y_0-\delta, y_0+\delta)$ komşuluğunda tanımlı öyle bir $x = f(y)$ fonksiyonu vardır ki her $y \in I$ için $F(f(y),y) = 0$ sağlanır.*

Örnek 34. *$x^3 - 2y^2 + xy = 0$ denkleminin, $x = 1$ noktasının bir komşuluğundaki her x için $y = f(x)$, $f(1) = 1$ şeklinde bir çözümü olduğunu gösterin. $\frac{dy}{dx}$ türevini $x = 1$ noktasında hesaplayın.*

Çözüm. *$F(x,y) = x^3 - 2y^2 + xy$ fonksiyonu heryerde sürekli kısmi türevlere sahiptir. Ayrıca $F(1,1) = 0$ ve*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -4y + x \,|_{(1,1)} = -3 \neq 0$$

olduğundan kapalı fonksiyon teoremindeki tüm şartlar yerine gelmiş olup, bahsedilen $y = f(x)$ fonksiyonu vardır.

$$\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = \frac{-3x^2 - y}{-4y + x} \,|_{(1,1)} = \frac{4}{3}$$

Teorem 8 ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fonksiyonlar için Ters Fonksiyon Teoremi)**.** *U, x_0 noktasının bir açık komşuluğu, $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $f'(x_0) \neq 0$ olsun. O halde $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}$ noktasının bir V açık komşuluğunda tanımlı sürekli türeve sahip bir g fonksiyonu vardır öyle ki*

$$g(f(x)) = x, \forall x \in U, \qquad f(g(y)) = y, \forall y \in V$$

ve

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

şartları sağlanır. Yani f fonksiyonun türetilebilir bir yerel tersi vardır.

Kanıt. $F(x,y) = y - f(x)$ olarak tanımlayalım.

1. F fonksiyonu $U \times f(U)$ kümesi üzerinde sürekli kısmi türevlere sahiptir.
2. $F(x_0, y_0) = 0$ olur.
3. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0$ olur.

Yani KFT'nin varsayımları gerçeklenmiş olur. O halde y_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve $F(g(y), y) = 0$ şartını yani $y - f(g(y)) = 0$ şartını sağlayan sürekli türeve sahip bir g fonksiyonu vardır. □

Kapalı Fonksiyon Teoremi. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durumu

Şimdi üç bilinmeyenli bir denklem ile ilgili kapalı fonksiyon teoremini inceleyelim.

Teorem 9 (Kapalı Fonksiyon Teoremi 2)**.** *(x_0, y_0, z_0) noktasının bir $R \subset \mathbb{R}^3$ komşuluğunda tanımlı $F : R \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Eğer*

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

ise

$$F(x, y, f(x,y)) = 0, \qquad f(x_0, y_0) = z_0$$

şartlarını sağlayan ve (x_0, y_0)'ın bir açık U komşuluğunda tanımlı tek bir $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Ayrıca f fonksiyonu tanımlandığı aralıkta türetilebilir bir fonksiyondur ve fonksiyon aşağıdaki sürekli kısmi türevlere sahiptir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}.$$

Bu türevler kısaca

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

olarak da gösterilir.

Alıştırmalar

1. $x^2y^2 + 2e^{xy} - 4 - 2e^2 = 0$ denkleminin $x = 1$ noktasının bir komşuluğundaki her x için $y = f(x)$, $f(1) = 2$ şeklinde bir çözümü olduğunu gösterin. $\frac{dy}{dx}$ türevini $x = 1$ noktasında hesaplayın.

2. Aşağıdaki verilen denklemlerin, (x_0, y_0) noktasının bir komşuluğundaki her (x, y) için $z = f(x, y)$, $f(x_0, y_0) = z_0$ şeklinde bir çözümü olduğunu gösterin. $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevlerini (x_0, y_0) noktasında hesaplayın.

   a) $x^2y^2z^2 + x + y + z = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -1, 1)$
   b) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$
   c) $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - 3\ln 2 = 0$ ve $(x_0, y_0, z_0) = (1, \ln 2, \ln 3)$.
   d) Yukarıdaki denklemler x için y ve z cinsinden veya y için x ve z cinsinden çözülebilir mi? İnceleyin.

3. g fonksiyonu, türevi $g'(u) < 1$, $u \in \mathbb{R}$ şartını sağlayan tek değişkenli bir fonksiyon ve $0 < a < b$ reel sayılar olsun. $x - az = g(y - bz)$ denkleminin herhangi bir (x, y) noktasında $z = f(x, y)$ şeklinde çözülebileceğini ve çözümün $a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$ denklemini sağlayacağını gösteriniz.

4. $f(x, y, z)$ fonksiyonu $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ şartlarını her yerde sağlayan sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Herhangi bir (x_0, y_0, z_0) noktasında $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$ bağıntısının sağlandığını gösterin.

Yönlü Türev

Tanım ve Örnekler

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$ ve $\vec{u} = u_1 i + i_2 j$ bir birim vektör olsun.

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)\mid_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

limiti mevcutsa, $D_{\vec{u}}$ sayısına f fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki $\vec{u}$ yönündeki yönlü türevi denir.

Uyarı 5. *$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ f'in (x_0, y_0) noktasındaki $u = i$ vektörü yönündeki, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ise f'in P_0 noktasındaki $u = j$ vektörü yönündeki yönlü türevleridir.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_i f(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_j f(x_0, y_0).$$

Uyarı 6. *Bir fonksiyonun $-\vec{u}$ yönündeki yönlü türevi (varsa) $\vec{u}$ yönündeki yönlü türevinin ters işaretlisi, yani*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = -D_{-\vec{u}} f(x_0, y_0)$$

olur. Zira $s = -t$ değişken dönüşümüyle

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 - tu_1, y_0 - tu_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{-s}$$

olduğu görülür.

Örnek 35. *$f(x, y) = x^2 y$ fonksiyonunun (1,2) noktasındaki ve $-3i + 4j$ yönündeki yönlü türevini bulun*

Çözüm. *Verilen vektör yönündeki birim vektör $\vec{u} = \dfrac{-3i + 4j}{5}$ olur.*

$$D_{\vec{u}} f(1, 2) = \frac{d}{dt}(1 + t(-3/5))^2 (2 + t(4/5)) \mid_{t=0} = -\frac{8}{5}$$

bulunur.

Yönlü Türev ve Türetilebilirlik

Bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonun birinci mertebe kısmi türevleri mevcut ise f nin bir (x_0, y_0) noktasındaki **gradyanı**

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 10. *$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $P_0(x_0, y_0) \in A$ noktasında türetilebilir ise*

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{u} \tag{7}$$

olur.

Kanıt. Fonksiyon P_0 noktasında türetilebilir ise zincir kuralı gereği

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) = f_x(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)u_1 + f_y(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)u_2$$

ve

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) \mid_{t=0} = f_x(P_0)u_1 + f_y(P_0)u_2 = \nabla f(P_0) \cdot \vec{u}$$

olur. □

Örnek 36. *Birinci örneği bu sefer (7) yardımıyla hesaplayın.*

Teorem 10, bir noktada türetilebilen fonksiyonun, o noktada her yönde yönlü türevinin olduğunu söyler. Ama bu önermenin tersi doğru değildir. Yani `bir noktada, her yönde yönlü türeve sahip olan bir fonksiyon, o noktada türetilemiyebilir.`

Örnek 37.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ *noktasındaki herhangi bir* $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ *yönündeki yönlü türevinin var olduğunu ama fonksiyonun* $(0,0)$ *noktasında türetilemez olduğunu gösterin.*

Çözüm.

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2)}{t} = \begin{cases} \dfrac{u_1^2}{u_2}, & u_2 \neq 0 \\ 0, & u_2 = 0 \end{cases}$$

olur. Yani fonksiyonun $(0,0)$ *noktasında her yönde yönlü türevi mevcuttur. Ancak* f $(0,0)$ *noktasında türetilemez. Zira, fonksiyon* $(0,0)$ *noktasında sürekli bile değildir. Bunu görmek için fonksiyonun* $(0,0)$ *noktasında* $y = kx^2$ *yönünden limiti* k*'ya bağlı çıktığından,* $(0,0)$ *noktasında limiti olmadığını görmek yeterlidir.*

Ayrıca bu örnek (7) *formülasyonu fonksiyon türetilebilir değil ise geçerli olmayabileceğini de gösterir. Zira* $\nabla f(0,0) = \vec{0}$ *olduğundan, ve örneğin* $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j$ *alırsak*

$$0 = \nabla f(0,0) \cdot \vec{u} \neq D_u f(0,0) = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur.

Uyarı 5, bir noktada her yönde yönlü türevi olan bir fonksiyonun, bariz olarak kısmi türevlerinin de tanımlı olduğunu söyler. Ama bunun tersi doğru değildir. Yani `bir noktada kısmi türevleri tanımlı olan bir fonksiyonun her yönde yönlü türevi olması gerekmez.`

Örnek 38.

$$f(x,y) = \begin{cases} x/y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ *noktasında sadece* $u = \pm i$ *ve* $u = \pm j$ *yönlerindeki yönlü türevlerinin tanımlı olduğunu gösterin.*

Yönlü Türevin Geometrik Anlamı

$D_u f(P)$ f'in P noktasında u yönündeki değişimini ifade eder.

$$\nabla f(P_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(P_0)\| \, \|\vec{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(P_0)\| \cos\theta$$

yazarsak $D_{\vec{u}}f(P_0)$ yönlü türevinin en büyük olması için, yani f in en hızlı şekilde artması için

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$$

yani $\theta = 0$ olmalıdır. *Yani bir fonksiyonun maksimum değişimi gradyan vektörü yönündedir.*

Değişimin sıfır olduğu yön ise

$$\vec{u} = \frac{f_y(P_0)i - f_x(P_0)j}{\|\nabla f(P_0)\|}$$

yönüdür.

Değişimin minimum olduğu yön (f'in en hızlı azaldığı yön) ise

$$\vec{u} = \frac{-\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$$

Örnek 39. *$f(x, y) = x^2y$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktasında en hızlı azaldığı yönü bulun.*

Çözüm. $\nabla f = 2xyi + x^2j$, *$\nabla f(1, 2) = 4i + j$, f'in en hızlı azaldığı yön $\vec{u} = \frac{-\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = -\frac{4}{\sqrt{17}}i - \frac{1}{\sqrt{17}}j$ olur.*

Alıştırmalar

1. $f(x, y) = \arctan\frac{\sqrt{x}}{y}$ fonksiyonunun $(4, -2)$ noktasındaki gradyan vektörünü ve $i+j$ yönündeki yönlü türevini bulun.
2. $f(x, y, z) = 3e^x\cos(yz)$ fonksiyonunun $(0, 0, 0)$ noktasındaki $u = 2i + j - 2k$ yönündeki yönlü türevini bulun.
3. $f(x, y) = xy + y^2$ fonksiyonunun $(3, 2)$ noktasındaki hangi yönde en çok artar/azalır? Hangi yönde fonksiyon sabit kalır?
4. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $\nabla(cf)$ (c sabit), $\nabla(f + g)$, $\nabla(fg)$, ∇f^α (α sabit) ifadelerini belirleyin.
5. Ahmet Tekcan, İleri Analiz, sayfa 268 Alıştırmalar 1-3

Analitik Geometri. Vektörler, Doğrular ve Düzlemler

Üç Boyutlu Uzayda Vektörler

3 boyutlu uzayda i, j ve k sırasıyla x, y ve z ekseni doğrultusundaki birim vektörler olmak üzere herhangi bir vektörü

$$\vec{u} = u_1i + u_2j + u_3k$$

olarak yazabiliriz. Burada u_1, u_2, u_3 reel sayılarına u vektörünün bileşenleri denir. Tüm bileşenleri sıfır olan vektöre, **sıfır vektörü** denir

$$\vec{0} = 0i + 0j + 0k$$

İki vektörü toplama ve bir vektörle bir skalerin çarpım işlemlerinin ve bu işlemlerin sağladığı özelliklerin bilindiğini varsayıyoruz. $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ vektörünün **boyu**

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

olarak tanımlanır.

İç Çarpım

$\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ ve $\vec{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ şeklinde iki vektörün **iç çarpımı**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

olarak tanımlanır. Aşağıdaki özellikler bütün vektörler ve skalerler için geçerlidir.

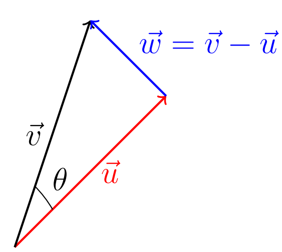
1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
2. $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$,
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,
4. $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c\vec{v}) = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
5. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

İç çarpım sayesinde iki vektör arasındaki açı belirlenebilir.

Lemma 2. *$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı θ ise,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta \tag{8}$$

olur.



Kanıt. Bu eşitlik kosinüs teoreminden elde edilen

$$(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$$

ifadesini açarak elde edilir. □

(8) bağıntısının bazı sonuçları şöyledir.

1. Sıfırdan farklı iki vektör ancak ve ancak iç çarpımları sıfır ise birbirine diktir, yani aralarındaki açı $90°$ olur.

2. $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\cos\theta|$ bağıntısı her $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri için geçerli olan ünlü Cauchy-Schwartz eşitsizliğini verir.
$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$
Yani
$$|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3| \leq (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$$

Vektörel Çarpım

$\vec{u} \neq \vec{0}$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ olsun. Hem $\vec{u}$ hem de $\vec{v}$ vektörlerine dik olan ve sağ el kuralı ile belirlenen bir tek birim vektör vardır. Bu vektöre $\vec{n}$ diyelim.

$$\vec{u}\times\vec{v} = (\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta)\vec{n}$$

olarak tanımlanır. Eğer vektörlerden biri $\vec{0}$ ise, vektörel çarpım $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$ olarak tanımlanır.

Sıfırdan farklı $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektörleri ancak ve ancak $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$ ise paraleldir. Özel olarak da $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$ olur.

Lemma 3. *Aşağıdaki özellikler her $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri ve her r, s skalerleri için geçerlidir.*

1. $(r\vec{u})\times(s\vec{v}) = (rs)(\vec{u}\times\vec{v})$,
2. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{u}\times\vec{w}$,
3. $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$,
4. $\vec{0}\times\vec{u} = \vec{0}$,
5. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.

Vektörel çarpımın tanımı sebebiyle

$$i\times j = k, \qquad j\times k = i, \qquad k\times i = j$$

olur. Bu özellikler kullanılarak $\vec{u} = u_1i + u_2j + u_3k$ ve $\vec{v} = v_1i + v_2j + v_3k$ vektörleri için, vektörel çarpımın

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= i(u_2v_3 - u_3v_2) - j(u_1v_3 - u_3v_1) + k(u_1v_2 - u_2v_1)\end{aligned}$$

olduğu gösterilir.

Vektör çarpımının birleşme özelliği yoktur. Örneğin

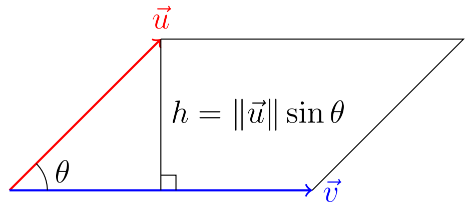
$$-j = i\times k = i\times(i\times j) \neq (i\times i)\times j = \vec{0}.$$

olur.

Vektörel Çarpımın Geometrik Anlamı. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ tarafından gerilen paralelkenarın alanı

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$$

olur. Gerçekten de $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ tarafından gerilen paralelkenarda, $\|\vec{v}\|$ taban uzunluğunu, $\|\vec{u}\|\sin\theta$ ise yüksekliği verir.



Üç Boyutlu Uzayda Parametrik Doğrular

Bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{v} = ai+bj+ck$ doğrultmanına sahip bir doğrunun parametrik denklemi

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılır. Burada $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, doğrunun üzerindeki bir noktanın pozisyon vektörü, $\vec{r}_0$ ise P noktasının pozisyon vektörüdür, yani $\vec{r}_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k$ şeklindedir. Her $t \in \mathbb{R}$ için yukarıdaki bağıntı, doğru üzerindeki başka bir noktanın pozisyon vektörüdür. Bu doğruyu tarif etmenin başka bir yolu da

$$x(t) = x_0 + ta, \qquad y(t) = y_0 + tb, \qquad z(t) = z_0 + tc.$$

şeklindedir. Eğer bu denklemden t'yi çekersek ve $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ olduğunu kabul edersek, doğrunun

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

standart denklemlerini elde ederiz.

Örnek 40. *$(-3, 2, -3)$ ve $(1, -1, 4)$ noktalarından geçen doğrunun standart denklemlerinin*

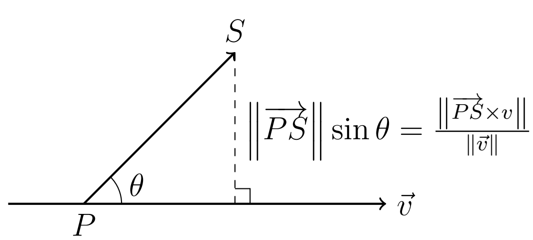
$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{7}$$

olduğunu gösterelim. (x_0, y_0, z_0) noktasını Q olarak seçip, $\overrightarrow{PQ} = 4i - 3j + 7k$ olduğuna dikkat edip bir önceki formülü kullanabiliriz.

Örnek 41. *Bir S noktasının, P noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{v}$ olan bir doğruya uzaklığının*

$$\frac{\left\|\overrightarrow{PS} \times v\right\|}{\|\vec{v}\|}$$

olduğunu gösterin.



Örnek 42. *$S(1,1,5)$ noktası ile parametrik denklemi $x = 1+t$, $y = 3-t$, $z = 2t$ olan doğru arasındaki mesafenin $\sqrt{5}$ olduğunu gösterin.*

Üç Boyutlu Uzayda Düzlemler

Bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktası ve $\vec{n} = ai + bj + ck$ normal vektörü bilinen bir düzlem üzerinde herhangi bir $P(x, y, z)$ noktası alırsak,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

olur. Bu da

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

veya

$$ax + by + cz = d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

olarak ifade edilebilir.

Tersine olarak düşünürsek,

$$ax + by + cz = d$$

denklemi, normali $ai + bj + ck$ vektörü olan düzlemin denklemidir.

Bir düzlemin normal vektörünün tek olmadığına dikkat edilmelidir.

Örnek 43. *$P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$, $R(5,2,0)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini yazın.*

Çözüm. *Düzlemin $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ olarak alabiliriz. Buradan*

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12i + 20j + 14k$$

bulunur. $P(1,3,2)$ noktasını alırsak, düzlemin denklemini

$$12(x-1) + 20(y-3) + 14(z-2) = 0$$

olarak buluruz.

Alıştırmalar

1. Köşegenleri birbirine dik bir dikdörtgen karedir. Gösterin.
2. Bir paralelkenar ancak ve ancak köşegenleri aynı uzunluktaysa, bir dikdörtgendir. Gösterin.
3. $\vec{u} \cdot \vec{u}_1 = \vec{u} \cdot \vec{u}_2$ ise $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ olmak zorunda mıdır?
4. Lemma 3 de verilen özellikleri ispatlayın.
5. Köşeleri $P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$ ve $R(-1,1,2)$ noktlarında olan üçgenin alanının $3\sqrt{2}$ olduğunu gösterin.

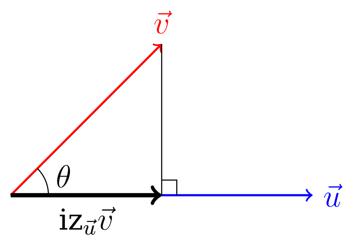
6. $i+2j-k$, $-2i+3k$ ve $7j-4k$ vektörleri tarafından gerilen paralelyüzlünün hacminin 23 birim küp olduğunu gösterin.

7. (9) nolu bağıntıyı gösterin.

8. Herhangi bir üçgende, iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru üçüncü kenara paraleldir, uzunluğu ise üçüncü kenarın uzunluğunun yarısıdır.

9. (Opsiyonel). Aralarındaki açı θ olan bir $\vec{v}$ vektörünün bir $\vec{u}$ vektörü üzerine iz düşüm vektörü

$$\begin{aligned}\text{iz}_{\vec{u}}\vec{v} &= (\|\vec{v}\|\cos\theta)(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}) \\ &= (\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta)(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}) \quad = (\vec{u}\cdot\vec{v})\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\end{aligned}$$



10. $\vec{v}\cdot\vec{u} = \text{iz}_{\vec{u}}\vec{v}\cdot\vec{u}$ olduğunu gösterin.

11. (Opsiyonel) Kenarları $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ tarafından gerilen üç boyutlu paralelyüzlünün hacmi

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|\,\|\vec{v}\|\,|\cos\theta|$$

tarafından belirlenir. Burada θ, $\vec{u}\times\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri arasındaki açıdır. Gerçekten, $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$, paralelyüzlünün taban alanını, $\|\vec{v}\|\,|\cos\theta|$ ise paralelyüzlünün yüksekliğini belirtir. Bu hacimi

$$\|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\| = \|\vec{u}\times\vec{v}\|\,\|\vec{v}\|\,|\cos\theta|$$

olarak da yazabiliriz.

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\in\mathbb{R}$$

sayısına, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin **üçlü çarpımı** denir. $u=u_1i+u_2j+u_3k$, $v=v_1i+v_2j+v_3k$ ve $w=w_1i+w_2j+w_3k$ olmak üzere, üçlü çarpım

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix} \qquad (9)$$

determinantı yardımıyla hesaplanabilir. (Gösterin)

Teğet Düzlem

Vektör Değerli Fonksiyonlar

$\mathbf{f}: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, $n\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 2$ için, bir **vektör değerli fonksiyon** denir. $\mathbf{f}: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ durumunda

$$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$$

olarak yazılabilir. f fonksiyonun görüntü kümesine $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir **eğri**, f fonksiyonuna ise bu eğrinin bir **parametrizasyonu** denir.

Örnek 44. $\mathbf{f}(t) = \ln t\mathbf{i}+e^t\mathbf{j}+\sqrt{1-t^2}\mathbf{k}$ *fonksiyonunun tanım kümesi* $(0,1]$ *olur.*

Örnek 45. $\mathbf{f}(t) = \cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}$, $t\in\mathbb{R}$ *fonksiyonu birim çemberin bir parametrizasyonudur. Başka bir deyişle* f *fonksiyonunun görüntü kümesi* $\mathbb{R}^2$ *de birim çemberdir.*

1. $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ve $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ise $(\mathbf{f}+\mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$ olarak tanımlarız. Benzer şekilde $\mathbf{f}-\mathbf{g}$, $(h\mathbf{f})$, $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$, $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$, $\mathbf{f}\circ h$ fonksiyonları tanımlanır.

2.
   - $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,
   $$0 < |t - t_0| < \delta \implies \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}\| < \epsilon$$
   koşulu sağlanırsa, $\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}$ deriz.
   - Gösterilebilir ki
   $$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$
   fonksiyonunun bir t_0 noktasındaki limiti ancak ve ancak x, y ve z skaler fonksiyonlarının t_0 noktasında limiti varsa vardır ve bu durumda
   $$\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} x(t)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t\to t_0} y(t)\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t\to t_0} z(t)\right)\mathbf{k}$$
   - a) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)) = (\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t)) + (\lim_{t\to t_0} \mathbf{g}(t))$,
     b) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)) = (\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t)) \cdot (\lim_{t\to t_0} \mathbf{g}(t))$,
     c) $\lim_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)) = (\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t)) \times (\lim_{t\to t_0} \mathbf{g}(t))$
     d) $\lim_{t\to t_0}(h(t)\mathbf{f}(t)) = (\lim_{t\to t_0} h(t))\,(\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t))$

     gibi klasik limit kuralları geçerlidir.

3.
   - Eğer $\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)$ ise $\mathbf{f}$ vektör değerli fonksiyonuna t_0 noktasında **sürekli** deriz. Eğer bu fonksiyon tanım kümesindeki her noktada sürekli ise, fonksiyonun kendisine **sürekli** deriz.
   - Gösterilebilir ki
   $$\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$
   fonksiyonu bir t_0 noktasında süreklidir ancak ve ancak x, y ve z skaler fonksiyonları t_0 noktasında sürekliyse. <u>örnek</u>. $\mathbf{f}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2-4}\mathbf{j}$ fonksiyonu tanımlı olduğu $(0,2)\cup(2,\infty)$ kümesi üzerinde süreklidir.

4.
   - $$\mathbf{f}'(t) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)}{h}$$
   limiti varsa $\mathbf{f}$ fonksiyonuna t noktasında türetilebilir denir.
   <u>örnek</u>. $\mathbf{f}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ fonksiyonunun türevi $\mathbf{f}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ olur.
   - Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ türetilebilir fonksiyonlar, $\mathbf{c}$ sabir vektör, c skaler ve f türetilebilir bir skaler fonksiyon ise
     a) $\frac{d}{dt}\mathbf{c} = \mathbf{0}$,
     b) $\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$
     c) $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$,
     d) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$
     e) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

f) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$.

ispat. Örneğin $\mathbf{u} = u_1(t)\mathbf{i} + u_2(t)\mathbf{j} + u_3(t)\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}$ olsun.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}\left(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\right)\\ &= \underbrace{u_1'v_1 + u_2'v_2 + u_3'v_3}_{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}} + \underbrace{u_1v_1' + u_2v_2' + u_3v_3'}_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'}\end{aligned}$$

olur.

Parametrik Eğriler

Tanım 6.

$$\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

olsun. x *ve* y*,* t*'nin türetilebilir fonksiyonları olsun.* $\mathbf{r}$ *fonksiyonun görüntü kümesi olan*

$$\mathbf{r}(I) = \left\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\right\}$$

kümesine $\mathbb{R}^2$*'de tanımlı bir* ***eğri*** *ve*

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

vektörüne, eğer sıfır vektörü değilse, bu eğrinin ***teğet vektörü*** *denir. Benzer bir şekilde* $\mathbb{R}^3$*'teki eğriler de tanımlanabilir.*

Örnek 46. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$ *olsun.* $x = t$, $y = t^2$ *yazıp* t*'yi elimine edersek,* $y = x^2$ *denklemini buluruz. Yani* $x(t) = t$ *ve* $y(t) = t^2$ *parametrik denklemleri,* $y = x^2$ *parabolünün* *bir* *parametrizasyonudur. Bu eğrinin teğet vektörü*

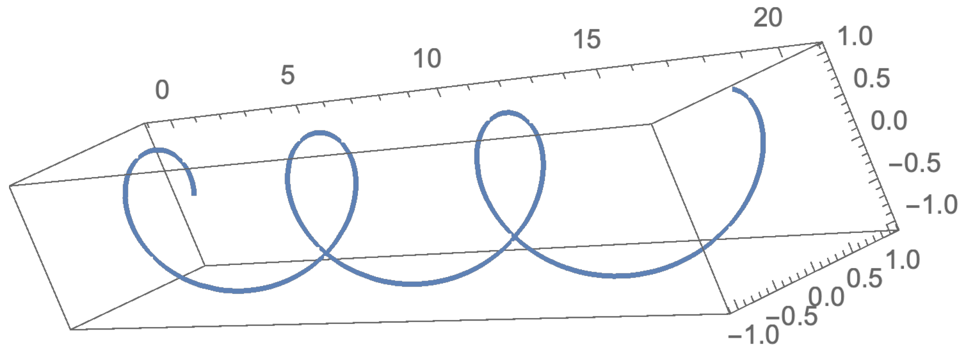
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

olur.

Örnek 47. *Her tek değişkenli sürekli* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun grafiği bir eğri tanımlar ve bu eğri* $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$ *denklemi ile parametrize edilebilir. Ancak tersine* $\mathbb{R}^2$*'deki her eğri bir fonksiyonunun grafiği değildir. Örneğin* $x^2 + y^2 = 1$ *çemberi bir fonksiyonun grafiği olarak yazılamaz.*

Örnek 48. $x^2 + y^2 = 1$ *çemberi parametrik olarak* $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$ *şeklinde yazılabilir. Aslında bir eğri sonsuz farklı parametrik denklemle tanımlanabilir. Örneğin* $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j}$ *denklemi de aynı çemberi tanımlar.*

Örnek 49. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ *parametrik denklemi* $\mathbb{R}^3$*'de bir helis tanımlar.*



Şekil 0.4: Helis grafiği.

Seviye Eğrileri ve Gradyan

Bir eğriyi tanımlamanın diğer bir yolu, eğriyi iki değişkenli reel değerli bir fonksiyonunun seviye eğrisi olarak tanımlamaktır.

Tanım 7. *$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$C_k = \{(x, y) \in A : f(x, y) = k\}$$

*kümesine f'nin bir **seviye kümesi** denir.*

1. $k \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ ve $k \neq m$ is $C_k \cap C_m = \emptyset$ olacağı açıktır zira $(x, y) \in C_k \cap C_m$ ise $f(x, y) = k$ ve $f(x, y) = m$ olduğundan $k = m$ olur.

2. Eğer $(x_0, y_0) \in C_k$ ve $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ ise (x_0, y_0) noktasının öyle bir $B \subset A$ açık komşuluğunu bulabiliriz ki $C_k \cap B$ kümesi bir eğridir.

   ispat (Opsiyonel). $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ olduğundan, örneğin $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ olarak alabiliriz (aksi halde $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ olur ve ispat benzer şekildedir). Kapalı fonksiyon teoremi, bir $\delta > 0$ ve $\epsilon > 0$ için $f(x, g(x)) = k$ ve $g(x_0) = y_0$ şeklinde tek bir $g : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ fonksiyonunun var olduğunu söyler. Dolayısıyla $B = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ kümesi için $C_k \cap B$ kümesi

   $$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \qquad t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

   olarak parametrize edilen bir eğridir.

Örnek 50. *Belirtilen fonksiyonların seviye kümelerini ve seviye eğrilerinin parametrik denklemlerini belirleyin.*

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, *2.* $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, *3.* $f(x, y) = e^{x+2y}$

Çözüm. *1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun seviye kümeleri $k < 0$ için boş küme, $k = 0$ için sadece orijin noktası, $k > 0$ için ise $\sqrt{k}$ yarıçaplı ve orijin merkezli çember olur. Bu çemberler her $k > 0$ için*

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{k}\cos t\mathbf{i} + \sqrt{k}\sin t\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

denklemiyle parametrize edilebilir.

2. *$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ fonksiyonunun seviye kümeleri $k < 0$ için boş küme, $k = 0$ için sadece orijin noktası, $k > 0$ için ise*

$$x^2 + 2y^2 = k = x_0^2 + 2y_0^2$$

denklemiyle tanımlı elipslerdir. Bu elipsler

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{k}\cos t\mathbf{i} + \sqrt{\frac{k}{2}}\sin\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

denklemiyle parametrize edilebilir.

3. *$f(x,y) = e^{x+2y}$ fonksiyonunun her $k \in \mathbb{R}$ için seviye eğrileri $x+2y = k$ doğrularıdır. Bu doğrular $y = t$ ve $x = k - 2t$ denklemi veya kısaca*

$$\mathbf{r}(t) = (k-2t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

denklemiyle parametrize edilebilir.

Teorem 11. *$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ türetilebilir bir fonksiyon, C eğrisi ise f'nin bir seviye eğrisi olsun. Bu durumda ∇f vektörü C eğrisine (yani C eğrisinin teğet vektörüne) diktir.*

Kanıt. C eğrisinin $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t \in I$ şeklinde parametrize edildiğini kabul edelim. Dolayısıyla bir $k \in \mathbb{R}$ için

$$f(x(t), y(t)) = k, \qquad \forall t \in I$$

olmalıdır. Yukarıdaki denklemde her iki tarafın d/dt türevini alırsak,

$$0 = \frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

buluruz. □

Bir topoğrafik haritadaki izohipsler yükseklik fonksiyonun seviye eğrileridir. Yukarıdaki teoreme göre bir topoğrafya haritasında nehirler izohipslere diktirler.

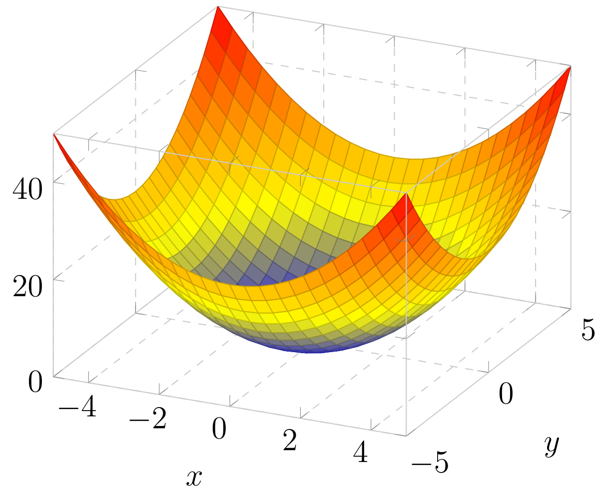
Örnek 51. ***Opsiyonel Örnek.*** *$(2,1)$ noktasından geçen ve $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ fonksiyonunun en hızlı arttığı yönde giden C eğrisini belirleyin.*

Çözüm. *Fonksiyonun en hızlı gittiği yön ∇f olduğuna göre, C eğrisinin teğet vektörü $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$ ile $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$ vektörü paralel olmalıdır. Yani bir c sayısı için*

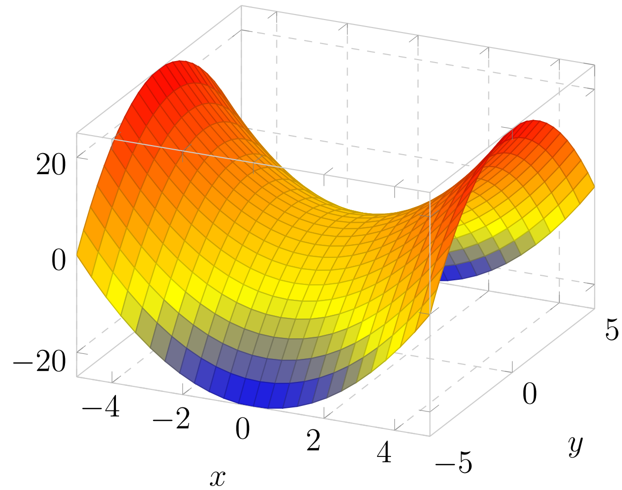
$$\frac{dx}{dt} = c2x, \qquad \frac{dy}{dt} = c4y$$

olmalıdır. Buradan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 2\frac{y}{x}$$



Şekil 0.5: $z = x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği.



Şekil 0.6: $z = x^2 - y^2$ fonksiyonunun grafiği.

yani

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

bulunur. Bu denklemin iki tarafını da integre edersek bir k sabiti için

$$\ln|y| = 2\ln|x| + k \implies |y| = e^k x^2 \implies y = \pm e^k x^2 \implies y = Kx^2$$

($K = \pm e^k$ olmak üzere) olur. Buradan da $x = 2$, $y = 1$ koyarsak $K = 1/4$ olur. Yani C eğrisi $y = x^2/4$ parabolüdür.

Yüzeyler

Eğriler gibi yüzeyleri tanımlamanın da bir kaç yolu vardır.

Birinci yol yüzeyi bir $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği olarak tanımlamaktır. Örnek olarak Figür 0.5 ve Figür 0.6 deki yüzeyler gösterilebilir.

Ama her yüzey bu şekilde tanımlanamaz. Örneğin $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi bir $z = f(x, y)$ fonksiyonunun grafiği olarak yazılamaz.

İkinci yöntem yüzeyi parametrik olarak tanımlamaktır.

$$\mathbf{r}(t, s) = x(t, s)\mathbf{i} + y(t, s)\mathbf{j} + z(t, s)\mathbf{k}, \qquad (s, t) \in A \subset \mathbb{R}^2$$

Bu durumda a yarıçaplı küre

$$x(\theta, \phi) = a\cos\theta\sin\phi, \quad y(\theta, \phi) = a\sin\theta\sin\phi, \quad z(\theta, \phi) = a\cos\phi, \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

olarak, yani küresel koordinatlar yardımıyla tanımlanabilir. Yüzeylerin parametrik gösterimi ile bu derste ilgilenmeyeceğiz.

$f(x, y, z) = k$ Seviye Yüzeyi ve Bu Yüzeyin Teğet Düzlemi

Tanım 8. *$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\{(x, y, z) \in A : f(x, y, z) = k\}$$

*kümesine f'nin bir **seviye kümesi** denir. Eğer bu küme $\mathbb{R}^3$'de bir yüzey tanımlıyorsa, bu yüzeye f'nin bir **seviye yüzeyi** denir. Eğer $(x_0, y_0, z_0) \in A$ ve $k = f(x_0, y_0, z_0)$ ise yüzey (x_0, y_0, z_0) noktasından geçer. Seviye yüzeyi üzerindeki bir eğriye, **seviye eğrisi** denir.*

Örnek 52. *$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonun $(1, -1, 0)$ noktasından geçen seviye yüzeyi*

$$f(x, y, z) = f(1, -1, 0)$$

yani

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

denklemi ile tanımlı küredir.

Teorem 11'e benzer bir teorem, üç değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

Teorem 12. *$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ türetilebilir bir fonksiyon, C eğrisi ise $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t \in I$ şeklinde parametrize edilmiş olsun. Ayrıca C, f'nin bir seviye eğrisi olsun. Yani bir $k \in \mathbb{R}$ için $t \in I$ için*

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k$$

olsun. Bu durumda $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ vektörü C eğrisine diktir. Yani

$$\nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

olur.

Bu teorem bize ∇f vektörünün f'nin bir seviye yüzeyindeki her eğriye dik olduğunu söyler. Yani başka bir deyişle ∇f vektörü f'nin seviye yüzeyine diktir.

Tanım 9. *$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $P(x_0, y_0, z_0) \in A$ noktasında türetilebilir olsun. $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve normal vektörü $\nabla f(P)$ olan düzleme $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ seviye yüzeyinin **teğet düzlemi** denir. Seviye yüzeyinin teğet düzleminin bir denklemi*

$$f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0) = 0$$

ve seviye yüzeyinin normal doğrusunun bir denklemi ise

$$x = x_0 + f_x(P)t, \quad y = y_0 + f_y(P)t, \quad z = z_0 + f_z(P)t,$$

olur.

Örnek 53. *$x^2 + y^2 + z^2 = 5$ yüzeyinin $(1, 2, 0)$ noktasındaki teğet düzlemini ve normal doğrusunu belirleyin.*

Çözüm. $f = x^2+y^2+z^2-5$ *olarak tanımlarsak,* $(1,2,0)$ *noktasında* $\nabla f = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k} = 2\mathbf{i}+4j$ *olduğundan, teğet düzlem*

$$2(x-1)+2(y-2)=0$$

normal doğru ise

$$x = 1+2t, \qquad y = 2+4t, \qquad z = 0$$

olur.

$z = f(x,y)$ Fonksiyonunun Grafiğinin Teğet Düzlemi

$z = f(x,y)$ fonksiyonun grafiği $g(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ yüzeyidir. Dolayısıyla bir $P(x_0,y_0,z_0)$ noktasında teğet düzlemi

$$g_x(P)(x-x_0)+g_y(P)(y-y_0)+g_z(P)(z-z_0)=0$$

Bu da

$$f_x(P)(x-x_0)+f_y(P)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

olarak yazılır.

Örnek 54. $z = x\cos y - ye^x$ *yüzeyine* $(0,0,0)$ *noktasındaki teğet düzlemin ve normal doğrunun denklemlerini bulun.*

Çözüm. $F(x,y,z) = x\cos y - ye^x - z$ *olarak tanımlarsak,* $(0,0,0)$ *noktasında*

$$\nabla F = (\cos y - ye^x)\mathbf{i} + (-x\sin y - e^x)\mathbf{j} - \mathbf{k} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

olur. Teğet düzlem

$$x - y - z = 0$$

normal doğru ise

$$x = t, \qquad y = -t, \qquad z = -t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

olur.

İki Yüzeyin Kesişim Eğrisinin Teğet Doğrusu

Teorem 13. (x_0,y_0,z_0) *noktası* $f(x,y,z) = 0$ *ve* $g(x,y,z) = 0$ *denklemlerinin bir çözümü olsun. Eğer*

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \times \nabla g(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$$

ise (x_0,y_0,z_0) *noktasının bir komşuluğunda* $f(x,y,z) = 0$ *ve* $g(x,y,z) = 0$ *yüzeyleri* (x_0,y_0,z_0) *noktasından geçen bir* C *eğrisinde kesişirler.* C *eğrisinin teğet vektörü* $\nabla f \times \nabla g$ *yönündedir.*

Kanıt.

$$\nabla f \times \nabla g = \left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \right)$$

olduğundan, bu Jakobyenlerden birisi, örneğin $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ Jakobyeni (x_0, y_0, z_0) noktasında sıfırdan farklı ise, x_0 noktasının yeterince küçük bir I komşuluğunda tanımlı öyle bir $y = X(x)$ ve $z = Z(x)$ fonksiyonları vardır ki

$$f(x, Y(x), Z(x)) = g(x, Y(x), Z(x)) = 0, \qquad \forall x \in I$$

olur. Eğer C eğrisini

$$x = t, \qquad y = Y(t), \qquad z = Z(t), \qquad t \in I$$

olarak tanımlarsak, yukarıdaki sonuç C eğrisinin her iki yüzey üzerinde olduğunu gösterir.

C eğrisi f'nin bir seviye eğrisi olduğundan ∇f vektörüne, g'nin bir seviye eğrisi olduğundan ise ∇g vektörlerine diktir. Yani $\nabla f \times \nabla g$ vektörüne paraleldir. □

Hatırlatma: P noktasındaki teğet vektörü v olan C eğrisinin normal düzlemi, P'den geçen ve normali v olan düzlemdir. Buna göre iki yüzeyin kesişim eğrisinin normal düzlemi bulunabilir.

Örnek 55. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ *silindiri ve* $g(x, y, z) = x + z - 4 = 0$ *düzlemlerinin* $(1, 1, 3)$ *noktasından geçen bir kesişim eğrisinin var olduğunu gösterin ve bu eğrinin teğet doğrusunun denklemini belirleyin.*

Çözüm. $(1, 1, 3)$ *noktasında* $\nabla f = 2i + 2j$, $\nabla g = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $v = \nabla f \times \nabla g = 2i - 2j - 2k$ *olur. Teğet doğrusunun denklemi*

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 1 - 2t, \qquad z = 3 - 2t$$

olur.

Alıştırmalar

1. Verilen (x_0, y_0) noktasında verilen $z = f(x, y)$ fonksiyonunun grafiğine teğet olan düzlemi bulun.
   a) $z = x^2 + xy$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$,
   b) $z = xe^y$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$,
   c) $z = x \ln y$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$,

2. $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy = 12$ yüzeyinin hangi noktasındaki teğet düzlemi xz-düzlemine paralel olur. (Cevap: $\mathrm{A}(2, 2, 0)$ ve $\mathrm{B}(-2, -2, 0)$, Çözüm: Mustafa Balcı).

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidine üzerindeki $P\,(x_0, y_0, z_0)$ noktasında teğet olan düzlemi belirleyin. (Cevap: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$, Çözüm: Mustafa Balcı).

4. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ yüzeyinin $x + 4y + 6z = 0$ düzlemine paralel olan teğet düzleminin denklemini yazınız. (Ce-

vap: $x+4y+6z=-21$. Çözüm: Mustafa Balcı).

5. $z=12-x^2-3y^2$ yüzeyinin $(2,-1,5)$ noktasından geçen normal doğrusunun standart denklemlerini yazın. (Cevap: $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-5}{1}$).

6. f türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyinin, $x_0\neq 0$ olmak üzere her $P(x_0,y_0,z_0)$ noktasındaki teğetinin orijinden geçtiğini gösteriniz. (Çözüm: Mustafa Balcı)

7. $z^2=x^2+y^2$ konisinin her noktasındaki teğet düzleminin orijinden geçtiğini gösteriniz. (Çözüm: Mustafa Balcı)

8. Nurettin Ergun, sayfa 124-130: 1, 2, 3, 7, 8, 9, 11.

Ektremum Problemleri

Hatırlatma: Tek Değişkenli Reel Değerli Fonksiyonlarda Ekstrem Değer Problemleri

$f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olsun.

- **Tanım 10.** *Bir $x_0\in A$ noktasının A içinde kalan bir komşuluğundaki her x değeri için $f(x)\geq f(x_0)$ ise $f(x_0)$ değerine f'nin bir **yerel minimumu** denir. Benzer şekilde **yerel maksimum** tanımlanır. $f(x_0)$ f'nin bir yerel minimum veya yerel maksimum değeri ise, $f(x_0)$ değerine f'nin bir **yerel ekstrem** değeri denir. f'nin tanım kümesindeki minimum değerine f'nin **mutlak minimum** değeri, maksimum değerine ise **mutlak maksimum** değeri denir. Benzer şekilde **mutlak ekstrem** değeri tanımlanır.*

- **Tanım 11.** *$f'(x)=0$ olan bir $x\in A$ noktasına f'nin bir **kritik noktası** denir.*

- **Teorem 14.** *i) x_0 noktası A kümesinin bir iç noktası, ii) $f'(x_0)$ tanımlı, iii) $f(x_0)$, f'nin bir yerel ekstrem değeri ise x_0 noktası f'nin bir kritik noktası olur.*

  Kanıt. $f'(x_0)\neq 0$ olsun. Genellikten kaybetmeksizin, örneğin $f'(x_0)>0$ kabul edelim.

  $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

  olduğundan, bir $\delta>0$ için $(x_0,x_0+\delta)$ aralığındaki her x için limit tanımından

  $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

olur (neden?) yani $f(x) > f(x_0)$ olur. Benzer şekilde bir $\delta' > 0$ için $(x_0 - \delta', x_0)$ aralığındaki her x için $f(x) < f(x_0)$ olur. Yani $f(x_0)$ bir yerel ekstrem değer olmaz. □

- Ters önerme doğru değildir. Yani $f'(x_0) = 0$ ise $f(x_0)$ bir ekstrem değer olmak zorunda değildir. Örnek olarak $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $f'(0) = 0$ olur ama $f(0) = 0$ fonksiyonun bir ekstrem değeri değildir.

- Dolayısıyla fonksiyonun yerel ekstrem değerleri ancak ve ancak fonksiyonun kritik noktalarında, türevinin tanımsız olduğu noktalarda ve fonksiyonun tanım kümesinin sınır noktalarında ortaya çıkabilir.

-

Teorem 15 (İkinci türev testi)**.** *f, f' ve f'' fonksiyonları x_0 noktasının bir komşuluğunda sürekli ve x_0 f'nin bir kritik noktası olsun. O halde i) $f''(x_0) > 0$ ise $f(x_0)$ bir yerel minimum, ii) $f''(x_0) < 0$ ise $f(x_0)$ bir yerel maksimum olur.*

Kanıt. Taylor Teoremine göre her $x \in A$ için

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

olur. Burada c, x ile x_0 arasındadır. $f'(x_0) = 0$ olduğundan

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

olur. f'' sürekli ve $f''(x_0) > 0$ olduğundan, x_0'ın yeterince küçük bir $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ komşuluğundaki her x için $f''(x) > 0$ olur. Yani bu komşuluktaki her x için $f(x) > f(x_0)$ ve $f(x_0)$ bir yerel minimum olur. Benzer şekilde diğer önerme gösterilir. □

- Eğer f sürekli ise ve A kümesi sınırlı ve kapalı ise (yani kompakt ise) f'nin A kümesi üzerinde mutlaka bir mutlak minimumu ve mutlak maksimumu olmak zorundadır.

İki Değişkenli Reel Değerli Fonksiyonlarda Ekstrem Değer Problemleri

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olsun.

- Tanım 10'de x_0 yerine (x_0, y_0) yazılarak tanımlar iki değişkenli fonksiyonlara taşınabilir.

-

Tanım 12. *Eğer $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ kısmi türevlerinden biri tanımlı değilse veya her ikisi birden tanımlı ve $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ oluyorsa, $(x,y) \in A$ noktasına f'nin bir* ***kritik noktası*** *denir.*

Yani kritik noktada kısmi türevler tanımlı ise $\nabla f(x,y) = 0$ olur. Buradan, eğer f kritik noktasında türetilebilen bir fonksiyon ise, kritik noktasındaki her yöndeki yönlü türevinin sıfır olması gerektiği sonucu çıkar

-

Teorem 16. *i) (x_0,y_0) noktası A kümesinin bir iç noktası, ii) f fonksiyonunun (x_0,y_0) noktasında kısmi türevleri tanımlı, iii) $f(x_0,y_0)$, f'nin bir yerel ekstrem değeri ise (x_0,y_0) noktası f'nin bir kritik noktasıdır.*

Kanıt. $g(x) = f(x,y_0)$ olsun. x_0 noktası ve g fonksiyonu Teorem 14'deki şartları sağladığından, $g'(x_0) = 0$ olur. $f_x(x_0,y_0) = g'(x_0)$ olduğundan $f_x(x_0,y_0) = 0$ olur. Benzer bir önerme $f_y(x_0,y_0) = 0$ olduğunu göstermek için de kullanılabilir. □

- Ters önerme doğru değildir. Yani fonksiyon bir kritik noktasında ekstrem değer almayabilir. Örneğin, $f(x,y) = xy$ fonksiyonu için $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ yani $(0,0)$, f'nin bir kritik noktası olur. $(0,0)$ noktasının her komşuluğunda (a,a) şeklinde bir nokta mutlaka vardır ve $a^2 = f(a,a) > f(0,0) = 0$ olacağından $f(0,0)$ bir yerel maksimum olamaz. Aynı önerme $(-a,a)$ noktası için tekrarlanırsa, $f(0,0)$ değerinin bir yerel minimum olamayacağı görülür.

- Dolayısıyla fonksiyonun yerel ekstrem değerleri ancak ve ancak fonksiyonun kritik noktalarında, türevinin tanımsız olduğu noktalarda ve fonksiyonun tanım kümesinin sınır noktalarında ortaya çıkabilir.

- $$\Delta f(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 17 (İkinci türev testi)**.** *f, ve f'nin birinci ve ikinci mertebe kısmi türevleri (x_0,y_0) noktasının bir komşuluğunda sürekli ve (x_0,y_0)'da f'nin bir kritik noktası olsun. O halde*

1. *$\Delta f(x_0,y_0) > 0$ ve $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ (veya $f_{yy}(x_0,y_0) > 0$) ise f, (x_0,y_0) noktasında bir yerel minimuma sahiptir.*
2. *$\Delta f(x_0,y_0) > 0$ ve $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ (veya $f_{yy}(x_0,y_0) < 0$) ise f, (x_0,y_0) noktasında bir yerel maksimuma sahiptir.*
3. *$\Delta f(x_0,y_0) < 0$ ise (x_0,y_0) noktası f'nin bir eyer noktasıdır. Yani (x_0,y_0), noktasının her komşuluğunda, $f(x_1,y_1) < f(x_0,y_0)$ ve $f(x_2,y_2) > f(x_0,y_0)$ bağıntılarını sağlayan (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktaları vardır. Yani fonksiyon (x_0,y_0) noktasında bir yerel minimum veya yerel maksimum değeri almaz.*

4. $\Delta f(x_0, y_0) = 0$ *ise kritik noktanın karakteri hakkında bir şey söylenemez.*

Kanıt. Taylor teoremine göre her $(x, y) \in A$ için

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(c,d)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(c,d)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(c,d)(y-y_0)^2\right) \end{aligned}$$

olur. Burada c, x ile x_0 arasında, d ise y ile y_0 arasındadır.

$$A = f_{xx}(c,d), \quad B = f_{xy}(c,d), \quad C = f_{yy}(c,d), \quad X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$$

olarak tanımlayalım. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ olduğundan her $(x, y) \in A$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}(AX^2 + 2BXY + CY^2) = \frac{A}{2}\left(\left(X + \frac{B}{A}Y\right)^2 + \frac{(AC - B^2)}{A^2}Y^2\right)$$

olur. Süreklilik nedeniyle (x_0, y_0)'ın yeterince küçük bir komşuluğunda $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ise $A > 0$, ve $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ ise $\frac{(AC-B^2)}{A^2} > 0$ olur. Buradan bu komşuluk içindeki her (x, y) için, $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$ olur. Yani birinci sonuç çıkar. Diğerleri de benzer şekilde gösterilir.

□

Örnek 56. $f(x, y) = x^2 + y^2$ *fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulun.*

Çözüm. $f_x = 2x = 0$ *ve* $f_y = 2y = 0$ *denklemlerinin tek çözümü* $(0, 0)$. $f_{xx} = 2$*,* $f_{xy} = 0$*,* $f_{yy} = 2$*. Yani* $\Delta f(0, 0) = 4 < 0$ *ve ikinci türev testine göre* $(0, 0)$ *fonksiyonun bir yerel minimum noktasıdır, bkz. Figür 0.5.* $f(x, y) \geq 0$ *olduğundan,* $(0, 0)$ *noktası fonksiyonun mutlak minimum noktasıdır.*

Örnek 57. $f(x, y) = x^2 - y^2$ *fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulun.*

Çözüm. $f_x = 2x = 0$ *ve* $f_y = -2y = 0$ *denklemlerinin tek çözümü* $(0, 0)$. $f_{xx} = 2$*,* $f_{xy} = 0$*,* $f_{yy} = -2$*. Yani* $\Delta f(0, 0) = -4 < 0$ *ve ikinci türev testine göre* $(0, 0)$ *bir eyer noktasıdır, bkz. Figür 0.6.*

Yukarıdaki örnekte $(0, 0)$ noktasının bir eyer noktası olduğunu $f(\epsilon, 0) = \epsilon^2 > 0$ ve $f(0, \epsilon) = -\epsilon^2 < 0$ olduğuna dikkat ederek de görebilirdik. Yani $(0, 0)$ noktasının her komşuluğunda $0 = f(0, 0)$'dan daha büyük değerler, daha küçük değerler de vardır.

Örnek 58. $f(x, y) = 6xy - 3x^2 - 3y^4$ *fonksiyonunun yerel eksremumlarını bulun.*

Çözüm. *Fonksiyonun* $(0, 0)$ *noktasında bir eyer noktası,* $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ *ve* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *noktalarında yerel maksimumları olduğunu gösterin.*

Örnek 59. $(2, -1, 1)$ *noktasının* $x + y - z = 2$ *düzlemine uzaklığını bulun.*

Çözüm. *Noktanın düzlem üzerindeki bir* (x, y, z) *noktasına uzaklığı*

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}.$$

Bu fonksiyonun $x + y - z = 2$ *düzlemi üzerindeki minimum değerini bulmak yerine* $D(x, y, z) = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$ *fonksiyonunun minimumunu bulmak yeterli ve daha kolaydır.* $z = x + y - 2$ *ifadesini* D *fonksiyonunda yerine koyarsak* $d(x, y) := D(x, y, x + y - 2) = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (x+y-3)^2$. $D_x = 2(x-2) + 2(x+y-3) = 0$, $D_y = 2(y+1) + 2(x+y-3) = 0$. *Kritik nokta* $(8/3, -1/3)$. *Bu noktada* $D_{xx} = 4$, $D_{xy} = 2$, $D_{yy} = 4$, $\Delta = 12 > 0$, $D_{xx} > 0$. *Uzaklık:* $d(8/3, -1/3, 1/3) = 2/\sqrt{3}$.

Kapalı ve Sınırlı Bir Bölge Üzerinde Maksimum ve Minimum

Teorem 18. $B \subset \mathbb{R}^2$ *bölgesi kapalı ve sınırlı bir küme,* $f : B \to \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde* f *mutlak ekstremum değerlerini mutlaka alır.* f *mutlak ekstremum değerlerini ya kritik noktalarında ya da* B *bölgesinin sınır noktalarında alir.*

Örnek 60. $f(x, y) = 2 + 2x + 4y - x^2 - y^2$ *fonksiyonunun* $x = 0$, $y = 0$ *ve* $y = 9 - x$ *doğruları ile sınırlanmış bölge üzerindeki mutlak ekstremum değerlerini bulun.*

Çözüm. *İç kritik noktalar:* $f_x = 2 - 2x = 0$ *ve* $f_y = 4 - 2y = 0$ *sonucu* $(1, 2)$ *olarak bulunur.*

Sınırdaki kritik noktalar: Üçgenin köşe noktaları $O(0, 0)$, $A(9, 0)$, $B(0, 9)$.

(i) OA *doğrusu üzerinde* $f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$, $0 \le x \le 9$. *Bu tek değişkenli fonksiyonun ekstrem değerleri uç noktalarda* $x = 0$, $x = 9$ *ve* $f'(x, 0) = 2 - 2x = 0$ *yani* $x = 1$ *noktasında ortaya çıkar. Kritik noktalar* $(0, 0)$, $(9, 0)$, $(1, 0)$.

(ii) OB *doğrusu üzerinde* $f(x, y) = f(0, y) = 2 + 4y - y^2$, $0 \le y \le 9$. $f'(0, y) = 4 - 2y = 0$ *ve* $y = 2$ *bulunudur. Kritik noktalar* $(0, 0)$, $(0, 9)$ *ve* $(0, 2)$.

(iii) AB *doğrusu üzerinde* $f(x, y) = f(x, 9 - x) = 2 + 2x + 4(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2$. $f'(x, 9 - x) = 16 - 4x = 0$ *ve* $x = 2$ *bulunur. Kritik noktlar* $(0, 9)$, $(9, 0)$, $(4, 5)$.

$f(1, 2) = 7$, $f(0, 0) = 2$, $f(9, 0) = -61$, $f(0, 9) = -43$, $f(1, 0) = 3$, $f(0, 2) = 6$, $f(4, 5) = -11$. *Mutlak minimum* -61, *mutlak maksimum* 7.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki fonksiyonların kritik noktalarını bulun ve cinslerini belirleyin.

   a) $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$. Cevap: $(-2, 2)$ yerel maksimum.

   b) $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$. Cevap: $(0, 0)$ eyer noktası, $(2, 2)$ yerel maksimum.

   c) $f(x, y) = 10xye^{-(x^2+y^2)}$. Cevap: $(0, 0)$ eyer noktası, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ve $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ yerel maksimum, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ve $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ yerel minimum.

2. Her $k \in \mathbb{R}$ değeri için $(0, 0)$ noktasının $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ fonksiyonunun bir kritik noktası olduğunu gösterin. (İpucu: $k = 0$ ve $k \neq 0$ durumlarını ayrı ayrı değerlendirin.)

3. Hangi $k \in \mathbb{R}$ değerleri için $(0,0)$ noktası $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$ fonksiyonunun bir yerel minimumu veya eyer noktası olur? (Cevap: $|k| < 2$ için yerel minimum, $|k| > 2$ için eyer noktası, $|k| = 2$ için 2. türev testi sonuç vermez. Ancak $k = \pm 2$ için $f(x,y) = (x \pm y)^2 \geq 0 = f(0,0)$ olduğundan $(0,0)$ yerel minimum olur.)

4. $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{1/3}\, dx$ integralinin en büyük değerini alması için $a \leq b$ olacak şekilde a ve b sayılarını belirleyin. (Cevap: $a = -3$, $b = 2$.)

5. Nurettin Ergun, sayfa 132-140, sayfa 140, 141 Örnekler 1, 2, 3. Ahmet Tekcan

6. Ahmet Tekcan, sayfa 288-292 çözümlü örnekler, sayfa 293 1-18, sayfa 299-304, örnekler 1-5, sayfa 304 1-9.

Lagrange Çarpanları Yöntemi

Teorem 19. *$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ türetilebilir bir fonksiyon olsun. Düzgün bir $C \subset A$ eğrisi*

$$C : \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

şeklinde parametrize edilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu C üzerinde bir P_0 noktasında ekstremum değerin alırsa, $\nabla f(P_0)$ vektörü C eğisine diktir, yani

$$\nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

Kanıt. f fonksiyonunun C üzerindeki değerleri $f(x(t), y(t))$ olur.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

f fonksiyonunun C üzerindeki ekstremum değerlerinde $df/dt = 0$ olduğundan sonuç çıkar. □

Eğer yukarıdaki teoremde verilen C eğrisi bir $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun seviye eğrisi ise, daha önce gördüğümüz üzere $\nabla g \neq 0$ vektörü C eğrisine diktir. Hem ∇f hem de ∇g fonksiyonu C eğrisine dik olduklarından birbirlerine paralel olurlar. Yani bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

bağıntısı sağlanır. Bu yöntem **Lagrange çarpanları yöntemi** denir.

Bu yöntem genel olarak n reel değişkenli reel değerli $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ kısıtı altındaki ekstrem değerlerini bulmak için de aynı şekilde geçerlidir.

Örnek 61. *$f(x,y) = xy$ fonksiyonunun $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ elipsi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini bulun.*

Çözüm. ***1. yöntem.***. *Elipsin y-ekseni üzerinde yer alan kısmı $y = \sqrt{2(1 - x^2/8)}$ fonksiyonu ile verilir. Fonksiyonu elipsin bu kısmına kısıtlarsak*

$$h(x) = f(x, \sqrt{2(1 - x^2/8)}) = x\sqrt{2(1 - x^2/8)}, \qquad -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}.$$

fonksiyonunu elde ederiz. Bu fonksiyonun minimum ve maksimum değerlerini şu şekilde bulabiliriz.

$$\frac{dh}{dx} = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

Ayrıca fonksiyonun sınır noktalarına da bakarsak

$$h(\pm 2\sqrt{2}) = 0, \qquad h(-2) = -2, \qquad h(2) = 2$$

Yani fonksiyonun elipsin üst kısmında aldığı minimum değer $f(-2, 1) = -2$, maksimum değer ise $f(2, 1) = 2$ olur. Benzer şekilde fonksiyonun elipsin y-ekseninin alt kısmı olan $y = -\sqrt{2(1 - x^2/8)}$ üzerinde de minimum ve maksimum değerlerinin aynı olduğunu görebiliriz. Yani fonksiyonun elips üzerindeki minimum değeri $f(-2, 1) = f(2, -1) = -2$, maksimum değeri ise $f(2, 1) = f(-2, -1) = 2$ olur.

2. yöntem. *Lagrange çarpanları yöntemini kullanalım. $g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1$ olarak tanımlayalım.*

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda \nabla g = \lambda(\frac{x}{4}\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Bağıntısı ve kısıt koşulu bize

$$\begin{aligned} y &= \lambda\frac{x}{4} \\ x &= \lambda y \\ \frac{x^2}{8} &+ \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

şeklinde üç denklem verir. Birinci ve ikinci denklemleri kullanırsak,

$$y = \frac{\lambda^2}{4}y \implies y = 0 \text{ veya } \lambda = \pm 2$$

buluruz. $y = 0$ ise ikinci denklemden $x = 0$ buluruz ki $(0, 0)$ noktası elips üzerinde yer almaz, yani üçüncü denklemi sağlamaz. Öte yandan $\lambda = \pm 2$ bize $\frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ denklemini verir. Bu denklemin çözümleri $y = \pm 1$ olur. 1. yöntem de bulunan 4 kritik noktayı belirledik.

Yukarıda işe yarayan yerine koyma yöntemi (1. yöntem) her zaman işe yaramayabilir. Zira 1. yöntem ile bulunan kritik nokta kısıt koşulunu sağlamayabilir. Bu durumlarda mutlaka Lagrange çarpanı yöntemini kullanmak zorunda kalırız.

Örnek 62. *$x^2 - z^2 = -1$ hiperbolik silindirinin orijine en yakın olduğu noktaları belirleyin.*

Çözüm. *Ekstrem değerini bulmak istediğimiz fonksiyon $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon yerine türevini almanın daha kolay olduğu ve ekstrem değerleri aynı noktalarda olan $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonunu kullanalım.*

1. yöntem. *$z^2 = x^2 - 1$ ifadesini f fonksiyonunda yazarak*

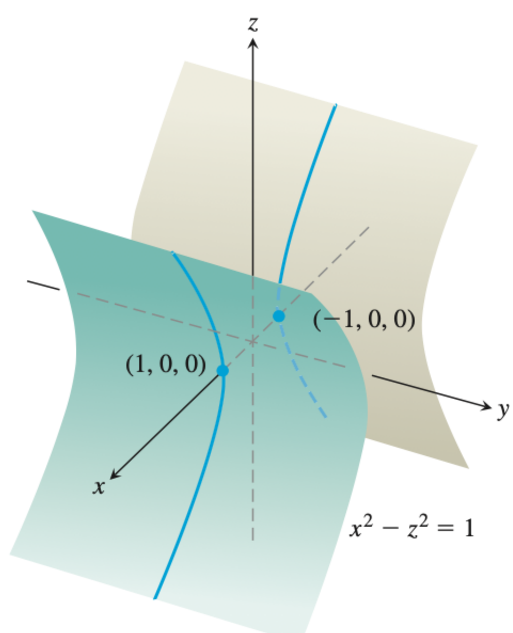
$$h(x,y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

elde ederiz. Bu fonksiyonun ekstrem değerleri $h_x = 4x = 0$, $h_y = 2y = 0$ denklemlerini sağlar. Yani tek kritik noktası $(x,y) = (0,0)$ noktasıdır. Ancak x koordinatı sıfır olan noktalar $x^2 - z^2 = -1$ hiperbolik silindiri üzerinde yer almaz. Bu yöntem sonuç vermedi. (Öte yandan $x^2 = z^2 + 1$ dönüşümünü kullansaydık sonucu elde edebilirdik.)

2. yöntem. Lagrange çarpanı. *$g(x,y,z) = x^2 - z^2 + 1$ olsun. $\nabla f = \lambda \nabla g$ denkleminden*

$$2x = \lambda 2x, \qquad 2y = 0, \qquad 2z = -\lambda 2z, \qquad x^2 - z^2 + 1 = 0$$

olur. Birinci denklemden $\lambda = 1$ veya $x = 0$ elde ederiz. $\lambda = 1$ için üçüncü denklem $z = 0$ verir ve son denklemin çözümü olmaz. $x = 0$ için, dördüncü denklem $z = \pm 1$ verir. Yani ekstrem değerler $(x,y,z) = (0,0,\pm 1)$ noktalarında gerçeklenir.



Şekil 0.7: Problemin geometrisi.

Örnek 63. *$f(x,y) = 3x + 4y$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde aldığı minimum ve maksimum değerleri bulun.*

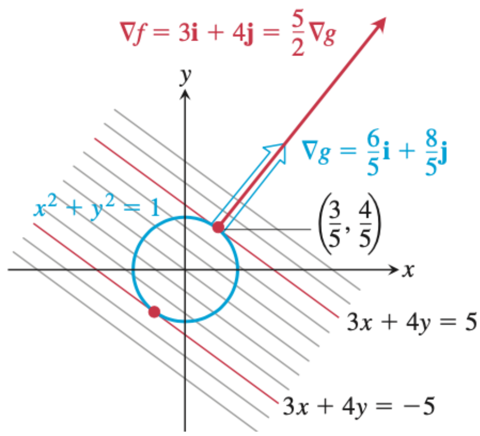
Çözüm. *$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ olsun.*

$$\nabla f = \lambda \nabla g \implies 3i + 4j = 2x\lambda i + 2y\lambda j \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$\lambda \neq 0$ olmalıdır ve $x = \frac{3}{2\lambda}$, $y = \frac{2}{\lambda}$ bulunur. İkinci denklemden

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1$$

Yani $\lambda = \pm\frac{5}{2}$, $x = \pm\frac{3}{5}$, $y = \pm\frac{4}{5}$ *olur. Yani ekstremum değerler* $(-3/5, -4/5)$ *ve* $(3/5, 4/5)$ *noktalarında çıkar.* $f(-3/5, -4/5) = -5$ *minimum değer,* $f(3/5, 4/5) = 5$ *ise maksimum değer olur.*



Şekil 0.8: Problemin geometrisi.

Örnek 64. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ *fonksiyonunun* $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$ *kısıtı altındaki ekstrem değerlerini bulun.*

Çözüm.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g = 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} 2x = \lambda(2x - 2) \\ 4y = \lambda(4y + 4) \\ x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} x = \lambda(x - 1) \\ y = \lambda(y + 1) \\ x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0 \end{array} \tag{10}$$

Denklemlerden $\lambda \neq 1$ *olur. Buradan* $x = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ *ve* $y = \frac{-\lambda}{\lambda - 1}$*, yani* $x = -y$ *olur. Son denklemden* $3x^2 - 6x = 0$ *yani* $(x, y) = (0, 0)$ *ve* $(x, y) = (2, -2)$ *çözümleri bulunur.* $f(0, 0) = 0$ *minimum,* $f(2, -2) = 12$ *ise maksimum değerdir.*

Zorunlu Olmayan Bölüm. İki kısıtlı Lagrange çarpanları

$f :\subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonun

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad g_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

kısıtları altinda ekstremlerinin bulunmasında Lagrange çarpanları yöntemi

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$

olur. *Yöntemin geometrik anlamı*: Burada λ ve μ Lagrange çarpanlarıdır. $g_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ seviye yüzeylerinin kesişim eğrisi C olsun. f fonksiyonunun bu kesişim doğrusu üzerindeki ekstrem değerleri aranmaktadır. Lagrange çarpanı yöntemi ekstrem değerlerin, ∇f vektörünün C eğrisine dik olduğu noktalarda ortaya çıkacağını söyler. C eğirisine dik olan her vektör ise $\lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ şeklinde yazılabilir.

Örnek 65. *$x+y+z=1$ ve $2x-y+z=3$ düzlemlerinin kesişim doğrusu L olsun. $P(1,2,-1)$ noktası ile L doğrusu arasındaki uzaklığı bulun.*

Çözüm. *Ekstrem değerlerini aradığımız fonksiyon $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$ (uzaklık fonksiyonun karesi) olur. $g_1(x,y,z)=x+y+z-1$ ve $g_2(x,y,z)=2x-y+z-3$ olsun. Lagrange çarpanları yöntemi*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}+\mu\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}+\mu\frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g}{\partial z}+\mu\frac{\partial h}{\partial z} \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} 2(x-1)=\lambda+2\mu \\ 2(y-2)=\lambda-\mu \\ 2(z+1)=\lambda+\mu \\ x+y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \end{array} \tag{11}$$

Bu denklemlerin ortak çözümü $Q(2,0,-1)$ noktasını verir. P noktasının Q noktasına uzaklığı $\sqrt{5}$ olarak hesaplanır.

Alıştırmalar

1. Ahmet Tekcan sayfa 315-316 1: 1-24, 2
2. $f(x,y)=x^2+y^2-6x+6y$ fonksiyonunun orijin merkezli ve 2 yarıçaplı çember üzerindeki mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.
3. $f(x,y)=x^2+y^2$ fonksiyonunun $x^2+xy+y^2=1$ elipsi üzerinde aldığı maksimum ve minimum değerlerini bulun. (Çözüm: Lagrange çarpanları yönteminden $x^2=y^2$ ve min: $(\sqrt{1/3},\sqrt{1/3})=f(-\sqrt{1/3},-\sqrt{1/3})=2/3$, maks: $f(1,-1)=f(-1,1)=2$.)

Çok Katlı Riemann İntegralinin Tanımı

Dikdörtgensel Bölgeler Üzerinde İki Katlı İntegraller

Bu bölümün genelinde $f:R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $R=[a,b]\times[c,d]$ bir dikdörtgen ve f'nin R üzerinde sınırlı olduğunu varsayalım.

$$a=x_0<x_1<\cdots x_m=b, \qquad c=y_0<y_1<\cdots y_n=d$$

ise

$$P=\{(x_i,y_j):0\le i\le m,\ 0\le j\le n\}$$

kümesine R bölgesinin bir **partisyonu** denir.

$$\begin{aligned} R_{ij}&=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}], \\ m_{ij}&=\inf_{R_{ij}} f(x,y) \\ M_{ij}&=\sup_{R_{ij}} f(x,y) \end{aligned}$$

f sınırlı olduğundan m_{ij} ve M_{ij} sayıları vardır.

$$L_f(P) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} m_{ij}\text{Alan}(R_{ij}),$$
$$U_f(P) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} M_{ij}\text{Alan}(R_{ij}),$$

toplamlarına sırasıyla **alt ve üst Riemann toplamları** denir.

Lemma 4. *$R \subset \mathbb{R}^2$ bir dikdörtgen, $f : R \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $\alpha = \inf_R f(x,y) \times$ Alan(R), $\beta = \sup_R f(x,y) \times$ Alan(R) ve P, R bölgesinin herhangi bir partisyonu olsun. O halde*

$$-\infty < \alpha \le L_f(P) \le U_f(P) \le \beta < \infty$$

olur.

Eğer $P \subset P'$ ise P' partisyonuna P'nin bir **incelmesi** denir.

Lemma 5. *Eğer $P \subset P'$ ise*

$$L_f(P') \ge L_f(P), \quad U_f(P') \le U_f(P)$$

olur.

Kanıt. Öncelikle P' partisyonunun P partisyonunda x_i ile x_{i+1} arasına bir $\hat{x}$ noktası eklenerek oluştuğunu varsayalım. Bu durumda önermenin gerçeklendiğini gösterin. Genel durum tümevarımla çıkar. □

Lemma 6. *P ve P', R bölgesinin hangi iki partisyonu olursa olsun*

$$L_f(P) \le U_f(P').$$

olur.

Kanıt. $P \subset P''$ ve $P' \subset P''$ olacak şekilde bir P'' bulunabileceğini gösterin.

$$L_f(P) \le L_f(P'') \le U_f(P'') \le U_f(P')$$

1. ve 3. eşitsizlik Lemma 4, 2. eşitsizlik Lemma 5 sebebiyle doğrudur. □

Alt ve üst Riemann integrallerini

$$\overline{L_f} = \sup\{L_f(P) : P,\ R\text{'nin bir partisyonu}\}$$
$$\underline{U_f} = \inf\{U_f(P) : P,\ R\text{'nin bir partisyonu}\}$$

olarak tanımlayalım. Lemma 6 sebebiyle

$$\overline{L_f} \le \underline{U_f}$$

olur.

Tanım 13. *$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $R = [a, b] \times [c, d]$ bir dikdörtgen ve f'nin R üzerinde sınırlı olduğunu varsayalım. Eğer $\overline{L_f} = \underline{U_f}$ ise f fonksiyonu R bölgesi üzerinde* ***Riemann anlamında integrallenebilir*** *denir ve*

$$\iint_R f(x, y)dA = \overline{L_f} = \underline{U_f}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 66. *$f(x, y) = k$ sabit fonksiyonu $R = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde integrallenebilir ve integrali*

$$\iint_R f(x, y)dA = c \times \text{Alan}(R)$$

bulunur.

Çözüm. *R bölgesinin her P partisyonu için, $M_{ij} = m_{ij} = k$ olacağından, her P için*

$$L_f(P) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} k\text{Alan}(R_{ij}) = \text{Alan}(R)$$

ve bu yüzden $\overline{L_f} = \text{Alan}(R)$ olur. Benzer şekilde $\underline{U_f} = \text{Alan}(R)$ olacağından sonuç bulunur.

Her sınırlı fonksiyon Riemann anlamında integrallenemez.

Örnek 67. *$R = [0, 1] \times [0, 1]$ ve*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in R \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \\ 0, & (x, y) \in R \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \end{cases}$$

fonksiyonu R bölgesi üzerinde integre edilemez. P, R'nin bir partisyonu olsun. Üst Riemann toplamının 1, alt Riemann toplamının 0 olduğunu gösterin.

Genel Bölgeler Üzerinde İki Katlı İntegraller

Geçen bölümde Riemann anlamında integrallenebilmeyi dikdörtgenlerde tanımlamıştık. Bu bölümde bu tanımı daha genel bölgelere taşıyacağız.

Tanım 14. *$B \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi sınırlı bir bölge $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da sınırlı bir fonksiyon olsun. R, B bölgesini içeren herhangi bir dikdörtgensel bölge olsun. f'in R üzerine genişletilmesini*

$$f_R(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in B \\ 0, & (x, y) \in R \setminus B \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Eğer f_R R bölgesi üzerinde Riemann anlamında integrallenebilirse, f B üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir denir ve

$$\iint_B f dA = \iint_R f_R dA$$

olarak tanımlanır.

Teorem 20. *Yukarıdaki tanım seçilen R dikdörtgensel bölgesine bağlı değildir.*

Kanıt. B'yi içeren bir R dikdörtgeni seçelim ve $\iint_B f dA = \iint_R f_R dA$ olarak tanımlayalım. R', R dikdörtgenini içeren bir dikdörtgense, $R' \setminus R$ en fazla dört dikdörtgenin (R_1, R_2, R_3 ve R_4) birleşimi olarak yazılabilir (biri diğerini içeren iki dikdörtgen hayal edin). $f_{R'} \mid_{R_i} = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ olduğundan,

$$\iint_{R'} f_{R'} dA = \sum_{i=1}^{4} \iint_{R_i} f_{R'} dA + \iint_R f_{R'} dA = \iint_R f_{R'} dA$$

Dolayısıyla tanımda iki farklı R ve R' dikdörtgenleri kullanılırsa her ikisini de içeren bir dikdörtgen R'' alınarak,

$$\iint_R f_R dA = \iint_{R'} f_{R'} dA = \iint_{R''} f_{R''} dA$$

olduğu bir önceki önermeden görülür. □

Şimdi hangi fonksiyonların Riemann anlamında integrallenebileceğini inceleyelim.

Tanım 15. *$B \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge olsun. Eğer $f(x, y) \equiv 1$ fonksiyonu B üzerinde integrallenebilirse, B bölgesine* ***ölçülebilir*** *denir ve $|B| = \iint_B 1 dA$ yazılır. $|B|$ sayısına B'nin* ***ölçümü*** *veya B'nin* ***alanı*** *denir.*

Teorem 21 (Lebesgue)**.** *Tanım 14'daki varsayımları kabul edelim. f'nin B bölgesi üzerinde Riemann anlamında integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul f_R genişlemesinin süreksiz olduğu noktaların ölçümü sıfır bir küme olmasıdır.*

Kanıt. Bu teoremin ispatı daha ileri analiz derslerinde yapılmaktadır. □

Lebesgue Teoremine göre B bölgesinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul B bölgesinin sınırının ölçümünün sıfır olmasıdır.

Sınırının ölçümü sıfır olmayan kümeler vardır ama bu tarz kümeleri hayal etmesi güçtür ve bu derste bu tarz kümelerle karşılaşmayacağız.

Tanım 16. *$f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ ve f, R üzerinde integrallenebilir olsun. V bölgesi de $z = f(x, y)$ yüzeyi altında, R bölgesi üzerinde kalan bölge ise*

$$\textit{Hacim}(V) = \iint_R f(x, y) dA,$$
$$\textit{Alan}(R) = \iint_R 1 dA$$

olarak tanımlanır.

İki Katlı İntegrallerin Hesaplanması

Ardışık Tek Katlı İntegraller

Örnek 68. *Aşağıdaki ardışık integralleri hesaplayın.*

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y dy dx = \frac{\pi^2}{2}+2.$

2. $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y dy dx = \frac{\pi}{4}.$

Fubini teoremi, iki katlı integralin iki ardışık tek katlı integral ile hesaplanabileceği durumları verir.

Teorem 22 (Fubini)**.** *$f : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu nokta sayısı sonsuz olmasın.*

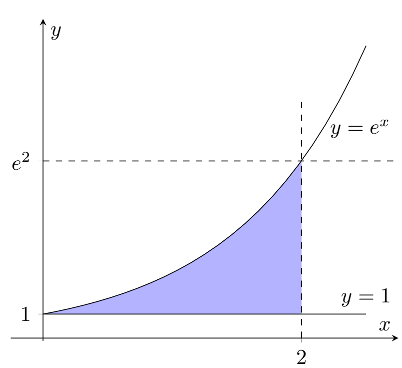
$g_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ sürekli olsun.

1. *Eğer $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ ise B bölgesine Tip-1 bölge denir. Bu durumda f, B üzerinde integrallenebilir ve*
$$\iint_B f(x,y)dA = \int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$
olur.

2. *Eğer $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b,\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$ bölgesine Tip-2 bölge denir. Bu durumda f, B üzerinde integrallenebilir ve*
$$\iint_B f(x,y)dA = \int_{y=a}^{b}\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dxdy$$
olur.

Kanıt. Bu teoremin ispatı daha ileri analiz derslerinde yapılmaktadır. □

Örnek 69. *$y = 1$ doğrusu, $x = 2$ doğrusu, ve $y = e^x$ eğrisi ile sınırlandırılmış R bölgesini çizin ve alanını hesaplayın.*



Şekil 0.9: Bölge hem Tip-1 hem de Tip-2 bölgedir.

Çözüm. ***1. Yöntem*** *Bölge Tip-1 bölge olarak yazılır:* $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq e^x$.

$$\iint_R 1dA = \int_0^2 \int_1^{e^x} dydx = \int_0^2 (e^x - 1)dx = e^x - x\Big|_0^2 = e^2 - 3.$$

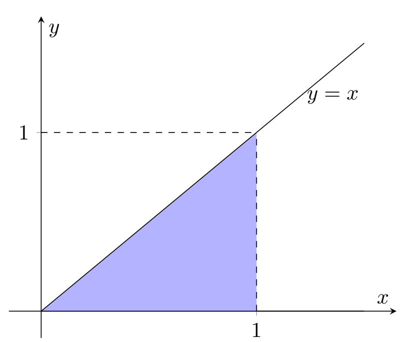
2. Yöntem *Bölge Tip-2 bölge olarak yazılır:* $1 \leq y \leq e^2$, $\ln y \leq x \leq 2$.

$$\iint_R 1dA = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 dxdy = \int_1^{e^2} (2-\ln y)dy = 2y - y\ln y + y\Big|_1^{e^2} = 2e^2 - 2e^2 + e^2 - (2+0+1) = e^2 - 3.$$

Aşağıdaki örnekte verilen bölge hem tip-1 hem tip-2'dir. Dolayısıyla çift katlı integral iki farklı şekilde iki tane tek katlı integral olarak yazılabilir. Ama integralin sonucu sadece birinden hesaplanabilir.

Örnek 70. $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dxdy$ *sıralı integralini hesaplayın.*

Çözüm. *Soruda verilen integral, verildiği şekliyle alınamaz. Ancak bu integral* xy*-düzlemi, x-ekseni,* $y = x$ *doğrusu ve* $x = 1$ *doğrusu ile sınırlanan* R *bölgesi için* $\displaystyle\iint_R \frac{\sin x}{x} dA$ *integralini hesaplamaktadır.*



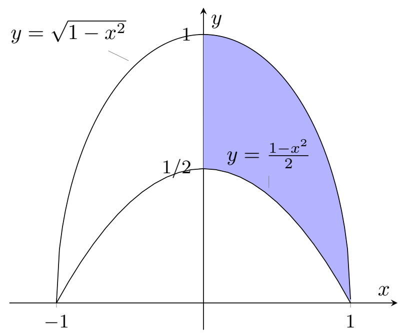
Şekil 0.10: Bölge hem Tip-1 hem de Tip-2 bölgedir.

İntegralde integrasyon sırasını değiştirirsek

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dydx = \int_0^1 \sin x dx = -\cos x\Big|_0^1 = 1 - \cos 1.$$

sonucunu elde ederiz.

Örnek 71. $\int_0^1 \int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$ *sıralı integralinin integrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırasını değiştirin.*



Şekil 0.11: Bölge Tip-1 bölgedir ama Tip-2 bölge değildir.

Çözüm. $\displaystyle\int_0^{1/2}\int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy + \int_{1/2}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy.$

Alıştırmalar

1. İntegrasyon bölgesini çizin ve integrasyon sırasını değiştirerek integrali hesaplayın.

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_{2y}^4 \exp(-x^2)dxdy$. (Cevap: $\int_0^4\int_0^{x/2}\exp(-x^2)dydx = \frac{1}{4}(1-e^{-16})$)

   b) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin(y^3)dydx$

2. T, xy düzleminde köşeleri $(0,0)$, $(0,3)$, $(1,3)$ olan üçgen olsun. $\iint_T 6\exp(-y^2)dA$ integralini hesaplayın.

3. $y = 4 - x^2$ ile $y = x + 2$ arasında kalan bölgenin alanını bulun.

4. R bölgesi $y = x + 1$ ve $x = 1 - y^2$ eğrileri arasında kalan bölge olsun. $\iint_R 4xydA$ integralini hesaplayın. (Cevap: $\iint_R 4xydA = \int_{-2}^{1}\int_{y-1}^{1-y^2} 4xydxdy = \frac{27}{2}$)

5. R bölgesi $x = \ln y$, $x = \ln 2y$, $y = 1$ ve $y = 2$ eğrileri arasında kalan bölge olsun. R bölgesinin üzerinde ve $z = e^{x+y^2}$ yüzeyinin altında kalan bölgenin hacimini bulun. (Cevap: $\iint_R e^{x+y^2}dA = \int_1^2\int_{\ln y}^{\ln 2y} e^{x+y^2}dxdy = \frac{e^4-e}{2}$)

Nurettin Ergun syf. 195 - 207: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9
Ahmet Tekcan sayfa 350-352 1-4
Mustafa Balcı 7.2: 1-3, 5-6

İki Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme

Hatırlatma. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-1 bir fonksiyon olsun. Eğer $x = g(u)$ dönüşümü yaparsak,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)du$$

olur.

Teorem 23. *B, xy-düzleminde kapalı sınırlı bir bölge ve Φ, uv-düzleminden xy-düzlemine bir koordinat dönüşümü olsun.*

$$(x,y) = \Phi(u,v) = (g(u,v), h(u,v))$$

birebir, örten ve birinci mertebeden türevlenebilen bir dönüşüm ise $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\iint_B f(x,y)dA = \iint_{g^{-1}(B)} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA'$$

olur.

Kanıt. Bu teoremin ispatı daha ileri analiz derslerinde yapılmaktadır. □

Burada dönüşümün Jakobiyen matrisi

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

bu matrisin determinantının mutlak değeri ise

$$\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki değişken dönüşümünde bu determinantın mutlak değeri yer almaktadır.

Bazı durumlarda x ve y'yi u ve v cinsinden bilmek yerine u ve v'yi x ve y cinsinden biliriz. Bu durumda iki değişkenli ters fonksiyon teoremi

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

olduğunu söyler.

Örnek 72. *Örnek olarak polar koordinat dönüşümü*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

için Jakobiyeni hesaplarsak

$$\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}\right| = \left|r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right| = |r| = r$$

Alıştırmalar

1. R, xy-düzleminde 1. bölgede, $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $xy = 1$, $xy = 2$ ile sınırlanan bölge olsun. $\iint_R (5(y - x^2)^4 + 6xy)(y + 2x^2)dA$ integralini uygun bir değişken dönüşümü yaparak çözün.
2. R, xy-düzleminde 1. bölgede $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$ ile sınırlanan bölge olsun. $\iint_R xy dA$ integralini hesaplayın.
3. R, xy-düzleminde $x + y = 0$, $x + y = 1$, $2x - y = 0$, $2x - y = 3$ ile sınırlanan paralelkenar olsun. $\iint_R (x + y)^2 dA$ integralini hesaplayın.

Ahmet Tekcan İleri Analiz, syf 367-370: 1: (1, 2, 6, 7, 10, 14, 16), 3: (1, 2, 4, 5, 6, 10), 4: (2, 5, 8)

Mustafa Balcı 7.3: 1-5.

Mustafa Balcı 7.4: 23, 24, 25, 27, 28, 29

Üç Katlı İntegraller

A. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

1. $\iiint_B (xz - y^3)dV$, $B = [-1, 1] \times [0, 2] \times [0, 1]$.
2. $\iiint_B \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV$, B; $z = 0$, $z = x$ düzlemleri ve $y^2 = 4 - 2x$ ile sınırlı bölge.
3. $\iiint_B e^{x+2y+3z} dV$, B; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ve $x + y + z = 1$ düzlemleri ile sınırlanan bölge.

B. Aşağıdaki bölgelerin hacmini hesaplayınız.

1. Köşeleri $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ve $(0, 0, c)$ olan tetrahedron. (Çözüm: NE, syf 217.)
2. $z = 2 - (x^2 + y^2)$ paraboloidi, $z = -1$ ve $z = 1$ düzlemleri arasında kalan bölge.
3. $\mathbb{R}^3$ uzayında, $z = x + y$, $z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ düzlemleri ile sınırlanan bölge.

C. Ahmet Tekcan (syf 405): 1, 2.

D. Mustafa Balcı 8.2: 2, 3, 4

E.

1. $x = y^2$ parabolik silindiri, $z = 0$ düzlemi ve $x+z = 1$ düzlemi ile sınırlanan bölgenin hacmini belirleyen $dzdxdy$ ve $dydzdx$ sıralı üçlü integralleri yazın. (cevap: $V = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_{0}^{1-x} dzdxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dydzdx$)
2. $\int_0^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} z^2 r^3 \sin\theta \cos\theta dzdrd\theta$ integralini $dzdydx$ sıralı yazın.

Silindirik Koordinatlar

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

1. $\iiint_B (x^2+y^2)dV$, B; $z=x^2+y^2$ paraboloidi ve $z=1$ düzlemi ile sınırlanan bölge. (Cevap: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r^3 dzdrd\theta = \pi/6$.)

2. $\iiint_B (x^2+y^2-z)dV$, B; alttan xy-düzlemi, üstten $z=9-x^2-y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan ve $x^2+y^2=1$ silindirinin dışında kalan bölge. (Cevap: $\int_1^3\int_0^{2\pi}\int_0^{9-r^2}(r^2-z)rdzd\theta dr$)

3. $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2}dV$, B; $x^2+y^2=25$ silindiri ve $z=-1$, $z=2$ düzlemleri ile sınırlı bölge.

4. $\iiint_B xydV$, B; $z=x^2+y^2$ paraboloidi, $z=0$ düzlemi ve $x^2+y^2=1$ silindiri ile sınırlanan bölge.

Küresel Koordinatlar

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

1. $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$, B; $x^2+y^2+z^2=x$ küresi ile sınırlı bölge.

2. $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)dV$, B; $x^2+y^2+z^2\leq 4$ ile sınırlı bölge.

3. $\iiint_B (x^2+y^2)dV$, B; $x^2+y^2+z^2=16$ küresi ile $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi arasında kalan bölge.

4. $\iiint_B (x+y+z)dV$, B; $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ yarı küresi ve xy-düzlemi ile sınırlı bölge.

5. $\iiint_B (x^2+y^2)dV$, B; üstten $x^2+y^2+z^2=9$ küresi, alttan xy-düzlemi ile sınırlı bölge.

6. $\iiint_B \sqrt{a^2+x^2+y^2}dV$, B; $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi ile $z=1$, $z=2$ düzlemleri ile sınırlanan bölge.

7. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$ küresi ve $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi arasında kalan bölgenin hacmini hesaplayın.

8. $\iiint_B dV$, B; $x^2+y^2+z^2=1$ küresinin içinde ve $z=\sqrt{12}(x^2+y^2)$ paraboloidinin üzerinde kalan bölge.

Eğrisel İntegraller

Fonksiyonların eğrisel integrali

Fiziksel amaç: Yoğunluğu verilen telin ağırlığını hesaplamak.

Tel bir C eğrisi ile gösterilsin ve f'de C üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun (telin yoğunluk fonksiyonu). C eğrisinin parametrizasyonu

$$\mathbf{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, \qquad a \le t \le b$$

ile verilsin. $a \le t \le b$ aralığının bir

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

parametrizasyonunu alıyoruz.

Telin kütlesi yaklaşık olarak

$$\sum_{k=1}^{n} f(x(t_k), y(t_k), z(t_k))\Delta s_k$$

şeklinde yazılır.

Yukarıdaki toplamın limiti, telin ağırlığını verir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x(t_k), y(t_k), z(t_k))\Delta s_k$$

Bu integrali hesaplamak için

$$\Delta s_k = \|\mathbf{r}(t_{k+1}) - \mathbf{r}(t_k)\| = \left\| \frac{\mathbf{r}(t_{k+1}) - \mathbf{r}(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right\| \Delta t_k = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_k^*) \right\| \Delta t_k$$

yazarsak, integral

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt$$

olarak ifade edilir. Burada

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \right)^{1/2}$$

yazarsak

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \right)^{1/2} dt$$

elde ederiz.

Eğer $f \equiv 1$ seçilecek olursa integral eğrinin uzunluğunu verir. Yani

$$C \text{ eğrisinin uzunluğu } = \int_C ds = \int_a^b \left(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \right)^{1/2} dt$$

olur.

Örnek 73. $f(x,y) = 2x + 4y$ *ve* $C : r(t) = \cos t i + \sin t j$, $0 \leq t \leq \pi/2$ *için* $\int_C f ds = ?$

Çözüm. $ds = (\sin^2 t + \cos^2 t)^{1/2} dt = dt$ *ve*

$$\int_C f ds = \int_0^{\pi/2} (2\cos t + 4\sin t) dt = 6$$

Örnek 74. *Orijini ve* $(1,1,1)$ *noktasını birleştiren doğru parçası üzerinde,* $f = x - 3y^2 + z$ *fonksiyonunun integralini hesaplayın.*

Çözüm. *Eğri* $\mathbf{r}(t) = ti + tj + tk$, $0 \leq t \leq 1$ *şeklinde parametrize edilir.* $ds = (1+1+1)^{1/2} dt = \sqrt{3} dt$ *ve*

$$\int_C f ds = \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3} dt = 0$$

Eğer C eğrisi $C_1, \ldots, C_n$ eğrilerinin uç uca eklenmesiyle oluşmuşsa

$$C = C_1 + \cdots + C_n$$

yazarız ve

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \cdots + \int_{C_n} f ds$$

olur.

Zorunlu Olmayan Bilgiler

Kapalı Fonksiyon Teoremi

$F = (f,g) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durumu

Şimdi dört bilinmeyenli iki denklem ile ilgili kapalı fonksiyon teoremini inceleyelim.

Tanım 17. $f(x,y)$ *ve* $g(x,y)$ *fonksiyonları için*

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}$$

matrisine Jakobiyen matris, bu matrisin determinantına ise Jakobiyen determinant veya kısaca Jakobiyen denir.

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right) = f_x g_y - g_x f_y.$$

Bu kavramı Alman Matematikçi Karl Gustav Jacop Jacobi 1830'larda tanımlamıştır.

Örnek 75. $u = x^2 + y^2$ *ve* $v = ye^x$ *ise*

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2xe^x - 2y^2e^x.$$

Lemma 7. *$\phi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y,u,v)$ ve $g(x,y,u,v)$ fonksiyonlarının hepsi türetilebilir olsun. Eğer*

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \neq 0 \tag{12}$$

ve

$$\begin{aligned} f(x,y,\phi(x,y),\psi(x,y)) = 0, \\ g(x,y,\phi(x,y),\psi(x,y)) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

şartları sağlanırsa ϕ_x, ϕ_y, ψ_x, ψ_y kısmi türevleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \tag{14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}. \tag{15}$$

Kanıt. (16) denklemlerini x'e göre türetirsek

$$\begin{aligned} f_x + f_u\phi_x + f_v\psi_x = 0 \\ g_x + g_u\phi_x + g_v\psi_x = 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_x & g_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \psi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x \\ -g_x \end{bmatrix}$$

buluruz. Bu denklemin çözümü verilen (12) şartı altında mümkündür ve çözümler (14) şeklindedir. Benzer şekilde (15) elde edilir. □

Şimdi kapalı fonksiyon teoreminin yeni bir şeklini yazalım.

Teorem 24 (Kapalı Fonksiyon Teoremi 3)**.** *(x_0,y_0,u_0,v_0) noktasını içeren bir $U \subset \mathbb{R}^4$ açık komşuluğunda $f : U \to \mathbb{R}$ ve $g : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli kısmi türevlere sahip olsun.*

$$f(x_0,y_0,u_0,v_0) = g(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$$

ve

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

şartları sağlansın. O halde, (x_0,y_0) noktasının bir $V \subset U$ açık komşuluğu, ve bu açık komşulukta tanımlı $\phi : V \to \mathbb{R}^2$, $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonları vardır. Bu fonksiyonlar

$$\phi(x_0,y_0) = u_0, \qquad \psi(x_0,y_0) = v_0$$

ve

$$\begin{aligned} f(x,y,\phi(x,y),\psi(x,y)) = 0, \\ g(x,y,\phi(x,y),\psi(x,y)) = 0 \end{aligned}, \qquad \forall(x,y) \in V \tag{16}$$

şartlarını sağlar. Bu fonksiyonlar sürekli kısmi türevlere sahiptir ve kısmi türevleri (14) ve (15) şeklinde verilir.

Teorem 24 ve Lemma 7 arasındaki fark, teoremde u ve v'nin x ve y'nin fonksiyonları olduğunu kabul etmiyoruz. Hatta bunu gösteriyoruz.

Örnek 76.

$$xu + yv^2 = 0$$
$$xv^3 + y^2u^6 = 0$$

denklemleri u ve v için x ve y cinsinden $x = 0$, $y = 1$, $u = 0$, $v = 0$ noktası civarında tek bir şekilde çözülebilir mi?

Çözüm. *Denklemleri sol taraflarına f ve g diyelim.*

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}_{(u,v,x,y)=(0,1,0,0)} = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix}_{(u,v,x,y)=(0,1,0,0)} = 0$$

olduğundan kapalı fonksiyon teoremi bize bu durumda bilgi vermez. Çözümün olup olmadığını incelemek için doğrudan analiz gereklidir.

$F = (f,g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **durumu**

Kapalı fonksiyon teoreminin $f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0$ denklem sisteminin x ve y için z cinsinden çözülebilirlik koşulu nasıl belirleyebileceğimizi gösteren bir örnek görelim.

Geometrik yorum. Eğer

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \neq 0$$

ise $f(x,y,z) = 0$ ve $g(x,y,z) = 0$ yüzeylerinin kesişimi (x_0,y_0) noktasının bir U komşuluğunda bir eğri tanımlar ve bu eğri yerel olarak z değişkeni tarafından parametrize edilebilir.

Örnek 77.

$$3x - \cos y + y + e^z = 0,$$
$$x - e^x - y + z + 1 = 0$$

denklem sistemini $(x,y) = (0,0)$ noktası civarında tek bir şekilde çözen $x = x(z)$ ve $y = y(z)$ fonksiyonlarının var olduğunu gösterin ve dx/dz ve dy/dz türevlerini hesaplayın.

Çözüm. *Denklemleri sol taraflarına f ve g diyelim. $f(0,0,z) = g(0,0,z) = 0$ denklemlerinin çözümü $z = 0$ verir.*

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\,|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 3 & \sin y + 1 \\ 1 - e^x & -1 \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(0,0,0)} = -3 \neq 0$$

olduğundan kapalı fonksiyon teoremi bize denklem sistemini $(x,y) = (0,0)$ noktası civarında tek bir şekilde çözen $x = x(z)$ ve $y = y(z)$ fonksiyonlarının var olduğunu söyler. Türevleri hesaplamak için denklem sisteminin z değişkenine göre türevini alalım.

$$3\frac{dx}{dz} + \sin y(z)\frac{dy}{dz} + \frac{dy}{dz} + e^z = 0$$
$$\frac{dx}{dz} - e^{x(z)} - y(z) + z + 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \sin y + 1 \\ 1 - e^x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^z \\ -1 \end{bmatrix}$$

sistemini çözersek

$$\frac{dx}{dz} = \frac{e^z + \sin y + 1}{-3 - (\sin y + 1)(1 - e^x)}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{e^{-z} - e^{x-z} - 3}{-3 - (\sin y + 1)(1 - e^x)}$$

buluruz.

Genel Durum: $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$

En genel durumda KFT şu şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ &f_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ &\vdots \\ &f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{aligned}$$

$n + m$ bilinmeyenli n denklemden oluşan bir denklem takımı olsun.

$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ bu denklem sisteminin bir çözümü olsun.

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \,|_{(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)} \neq 0$$

ise bu denklem takımı $y_1, \ldots, y_m$ için $x_1, \ldots, x_n$ cinsinden $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ noktasının bir komşuluğunda tek bir şekilde çözülebilir.

Örnek 78.

- $f_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0$, $f_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0$ *ve* $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_1, y_2)} \neq 0$ *ise* $\dfrac{\partial y_2}{\partial x_3}$ *kısmi türevini uygun jakobyenler aracılığıyla bulunuz.*
- *Ahmet Tekcan, İleri Analiz, syf 253-255: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*
- *Ahmet Tekcan, İleri Analiz, syf 261-262: 2, 4, 5, 6, 7.*

Kaynakça

[BST08] Andrew M. Bruckner Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner, *Elementary Real Analysis*, `http://classicalrealanalysis.info/documents/TBB-AllChapters-Landscape.pdf`, 2008.

[Wad00] William Wade, *An introduction to analysis, second edition*, 2000.